Corrigé du devoir n° 3

Exercice 1. Soit $P(X)$ un polynôme unitaire (donc non nul) à coefficients réels et scindé sur $\mathbb{R}$, c'est- à-dire ayant toutes ses racines dans $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Tous les coefficients de $P(X)$ sont positifs ou nuls.
2. Toutes les racines de $P(X)$ sont négatives ou nulles.

Écrivons $P(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$. Les coefficients de $P(X)$ s'expriment en fonction de ses racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (comptées avec multiplicité), grâce aux formules

$$a_{n-k} = (-1)^k \sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}. \tag{1}$$

Si $a_i \geqslant 0$ pour tout i, alors $P(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ est **strictement positif** si x est un réel **strictement positif**. Les racines de $P(X)$, qui par hypothèse sont toutes réelles, sont donc nécessairement **négatives ou nulles**. Inversement, si cette dernière propriété est satisfaite, les formules (1) ci-dessus montrent que les coefficients de $P(X)$ sont positifs ou nuls.

Application : soit A une matrice symétrique réelle de taille n, et q la forme quadratique associée, c'est- à-dire $q(x) = {}^t x A x$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ (vecteur colonne). On dit que q (resp. A) est *semi définie positive* si $q(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (resp. ${}^t x A x \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$). Montrer que les propriétés suivantes, pour une matrice symétrique réelle non nulle $A = (A_{ij})_{i \leqslant i,j \leqslant n}$ de taille n, sont équivalentes :

1. A est semi définie positive.
2. Les valeurs propres de A sont positives ou nulles.
3. Les coefficients du polynôme $P(X) := \det(A + XI_n)$ sont positifs ou nuls (I_n désigne la matrice identité de taille n).
4. Pour tout $J \subset \{1, \cdots, n\}$, on a : $\det (A_{i,j})_{i \in J, j \in J} \geqslant 0$.

Comme A est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale, c'est- à-dire qu'il existe une matrice P orthogonale ($P^{-1} = {}^t P$) telle que ${}^t PAP = P^{-1}AP = D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, les λ_i désignant les valeurs propres de A. Ainsi, en posant $Y = PX$, on obtient ${}^t XAX = {}^t YAY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$. Pour que cette dernière quantité soit positive ou nulle pour tout X, c'est- à-dire tout Y, de $\mathbb{R}^n$, il est donc nécessaire et suffisant que les λ_i soient positifs ou nuls, ce qui établit l'équivalence $(1) \Leftrightarrow (2)$.
Le polynôme caractéristique de la matrice $-A$ s'écrit $\chi_{-A}(X) = \det(XI_n + A)$, où I_n désigne la matrice identité en dimension n. On a alors, avec les notations précédentes,

$$\chi_{-A}(X) = \chi_{-D}(X) = \prod_{i=1}^n (X + \lambda_i)$$

En appliquant le résultat de la question précédente au polynôme $P(X) := \chi_{-A}(X)$, on obtient l'équivalence $(2) \Leftrightarrow (3)$.
Enfin, pour montrer l'équivalence $(3) \Leftrightarrow (4)$ on procède comme suit :

- $(3) \Rightarrow (4)$.
  Clairement, la restriction à un sous espace d'une forme semi-définie positive est elle-même semi-définie positive. Par ailleurs le déterminant d'une matrice semi-définie positive est positif ou nul, puisqu'il est égal au produit de ses valeurs propres, lesquelles sont positives ou nulles en vertu de l'équivalence $(1) \Leftrightarrow (2)$ établie précédemment. Ainsi, pour tout $J \subset \{1, \cdots, n\}$, les matrices $(A_{i,j})_{i \in J, j \in J}$, que l'on peut voir comme matrices de la restriction à un sous espace convenable de la forme initiale, ont un déterminant positif ou nul, ce qui établit (4).

- $(4) \Rightarrow (3)$.
  Pour montrer cette implication, il faut exprimer les coefficients de $P(X) := \det(A + XI_n) = \chi_{-A}(X)$ en fonction des $\det\left(A_{i,j}\right)_{i\in J, j\in J}$. En notant $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice A et $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ celles de la matrice identité, on a

$$P(X) = \det(A + XI_n) = \det\left(C_1 + X\Gamma_1, \ldots, C_n + X\Gamma_n\right).$$

  Les propriétés de multilinéarité du déterminant permettent alors d'établir facilement que le coefficient de X^k dans $P(X)$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ est égal à

$$\sum_{J\subset\{1,\cdots,n\}, \mathrm{Card}\, J = n-k} \det\left(A_{i,j}\right)_{i\in J, j\in J}$$

  En particulier, ces coefficients sont tous positifs ou nuls si $\det\left(A_{i,j}\right)_{i\in J, j\in J} \geqslant 0$ pour toute partie J de $\{1, \cdots, n\}$.

Exercice 2. Soit K un corps commutatif et $P(X)$ un polynôme à coefficients dans K, scindé sur K, et n'ayant que des racines simples. Montrer que

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)(X - x_i)}.$$

Application : déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{R}(X)$, où n désigne un entier naturel non nul.

Note : l'énoncé oubliait (sic) de préciser que n est le degré de $P(X)$ et que les x_i sont ses racines (cela allait sans dire...).

Quitte à diviser $P(X)$ par son coefficient dominant, ce qui multiplie par une même constante les deux membres de l'égalité à démontrer, on peut supposer $P(X)$ unitaire, auquel cas

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

On en déduit que $P'(X) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} (X - x_j)$ et en particulier

$$P'(x_i) = \prod_{j\neq i} (x_i - x_j).$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P(X)}$ s'écrit

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{X - x_i} \tag{2}$$

où les a_i sont des constantes (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que les racines sont simples). En multipliant successivement chaque membre de l'égalité (2) par $(X - x_i)$ pour chaque valeur de i, et en spécialisant la formule obtenue en $X = x_i$, on obtient que $a_i = \dfrac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} = \dfrac{1}{P'(x_i)}$.

Pour $P(X) = X^n - 1$, la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, est donc donnée par

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n\left(\zeta^k\right)^{n-1}\left(X - \zeta^k\right)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\zeta^k}{n\left(X - \zeta^k\right)}$$

où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. En regroupant deux par deux les termes correspondants à des racines conjuguées, on obtient la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$:

- si n est pair :

$$\frac{1}{X^n-1}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{2\left((\cos\frac{2k\pi}{n}X)-1\right)}{X^2-2(\cos\frac{2k\pi}{n})X+1}\right).$$

- si n est impair :

$$\frac{1}{X^n-1}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{X-1}+\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2\left((\cos\frac{2k\pi}{n}X)-1\right)}{X^2-2(\cos\frac{2k\pi}{n})X+1}\right).$$

Exercice 3. Soit $\mathcal{P}$ une parabole dans le plan affine euclidien et $\mathcal{C}$ un cercle rencontrant $\mathcal{P}$ en quatre points distincts. Montrer que l'isobarycentre de ces quatre points appartient à l'axe de la parabole [*on pourra se placer dans un repère orthonormé d'origine le sommet de la parabole et d'axe des abscisses la tangente à $\mathcal{P}$ en ce sommet*].

On identifie le plan euclidien à $\mathbb{R}^2$. Modulo une isométrie convenable, on peut suposer que l'axe de $\mathcal{P}$ coïncide avec l'axe des ordonnées d'équation $x=0$ et que son sommet est au point $(0,0)$. Autrement dit, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation

$$y=ax^2, \tag{3}$$

où a est une constante. Le cercle $\mathcal{C}$ peut être décrit par une équation du type

$$x^2+y^2+bx+cy+d=0$$

où b, c et d sont des constantes. En injectant la relation (3) dans cette équation, on voit donc que les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ sont les racines de l'équation

$$a^2x^4+(1+ac)x^2+bx+d=0.$$

Les relations, rappelées plus haut, entre racines et coefficients d'un polynôme, montrent alors que la somme de ces abscisses est nulle (c'est le coefficient de x^3 dans l'équation précédente), ce qui prouve bien que l'isobarycentre des points correspondants est sur l'axe des ordonnées.