ANALYSE 3 POUR MATH-INFO

Denis Benois

Université de Bordeaux

2020

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

SÉRIES NUMÉRIQUES

1.1. Premières notions sur les séries

***Définition.* —** *On appelle série numérique toute écriture de la forme*

(1) $$\sum_{k\geqslant 0} u_k,$$

où $(u_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite de nombres réels ou complexes. On dit aussi que (1) est la série de terme général u_k.

On appelle somme partielle de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ au rang n la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

***Exemple 1.1.1.* —** Soit q un nombre complexe fixé et soit $u_k = q^k$. La série géométrique de terme initial u_0 et de raison q est la série de terme général $u_k = u_0 q^k$:

$$\sum_{k\geqslant 0} u_0 q^k.$$

On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_0 q^k = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{u_0(q^{n+1}-1)}{q-1}.$$

***Exemple 1.1.2.* —** Soit a un nombre fixé et soit $u_k = a$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On dit que

$$\sum_{k\geqslant 0} a$$

est la série de terme constant égal à a. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a = (n+1)a.$$

1.1.3. — Plus généralement, on peut considérer les séries de la forme

$$\sum_{k\geqslant k_0} u_k,$$

où $k_0 \in \mathbf{Z}$ est un entier fixé. On définit les sommes partielles de manière analogue :

$$S_n = \sum_{k=k_0}^{n} u_k, \qquad n \geqslant k_0.$$

Remarquons que si on a une série de la forme $\sum\limits_{k\geqslant k_0} u_k$, on peut toujours se ramener à l'écriture (1) en posant $a_k = u_{k+k_0}$:

$$\sum_{k\geqslant k_0} u_k = \sum_{k\geqslant 0} a_k.$$

***Définition.* —** *i) On dit qu'une série numérique* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *converge si la suite* $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *des sommes partielles de la suite converge. Sinon on dit que la série diverge.*

ii) Soit $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *une série convergente. La limite* $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ *de la suite* $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *est appelée somme de la série et notée*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

On appelle reste de rang n la différence

$$R_n = S - S_n.$$

Il est facile de voir que R_n *est la somme de la série convergente* $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$ *:*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

***Exemple 1.1.4.* —** La série

$$\sum_{k\geqslant 0} a$$

diverge pour tout $a \neq 0$. En effet, la suite de terme général $S_n = (n+1)a$ converge si et seulement si $a = 0$.

***Exemple 1.1.5.* —** On étudie la série

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(k+1)}.$$

On note $u_k = \frac{1}{k(k+1)}$ son terme général. Alors

$$u_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Cela nous permet de calculer les sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$, la série converge vers 1 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

La propriété suivante est complètement élémentaire, mais souvent utile pour l'étude de convergence.

***Proposition 1.1.6.* —** *Soit* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *une série et soit* $k_0 \in \mathbf{N}$ *un entier positif. Alors* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *et* $\sum_{k\geqslant k_0} u_k$ *convergent ou divergent en même temps.*

Démonstration. — Soient S_n et T_n les sommes partielles de rang n des séries $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum_{k\geqslant k_0} u_k$ respectivement. On pose $A = \sum_{k=0}^{k_0-1} u_k$. Alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} u_k + \sum_{k=k_0}^{n} u_k = A + T_n, \qquad \forall n \geqslant k_0.$$

On en déduit que les suites $(S_n)_{n\geqslant 0}$ et $(T_n)_{n\geqslant k_0}$ convergent ou divergent en même temps, d'où la proposition. □

On a la condition *nécessaire* de convergence suivante.

***Proposition 1.1.7.* —** *Si* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *est une série convergente, alors le terme général de la série tend vers* 0 *:*

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = 0.$$

Démonstration. — On peut écrire le terme général u_n de la suite sous la forme $u_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geqslant 1$). Alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$
où $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$. □

Corollaire 1.1.8. — *Si la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ diverge, alors la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ diverge également. Dans ce cas, on dit que la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est grossièrement divergente.*

Les exemples suivants montrent que cette condition n'est pas suffisante.

Exemple 1.1.9. — On considère la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ où
$$u_k = \log\left(1+\frac{1}{k}\right).$$
Il est clair que $\lim_{k\to+\infty} u_k = \log(1) = 0$. Pour montrer que la série diverge, on écrit son terme général sous la forme
$$u_k = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log(k).$$
Maintenant on peut calculer les sommes partielles facilement :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(\log(k+1)-\log(k)) = (\log(2)-\log(1)) + (\log(3)-\log(2)) +$$
$$+ (\log(4)-\log(3)) + \cdots + (\log(n+1)-\log(n)) = \log(n+1)-\log(1) = \log(n+1).$$
Comme $\lim_{n\to+\infty}\log(n+1) = +\infty$, la série diverge.

Exemple 1.1.10. — **(Serie harmonique).** La série harmonique est la série des inverses des nombres entiers positifs :
$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}.$$
Nous allons prouver que cette série diverge. Comme le terme général de la série harmonique tend vers 0, cela montrera que *la condition nécessaire de convergence donnée par la Proposition 1.1.7 n'est pas suffisante*.

Soit S_{2^n} la somme partielle au rang 2^n. On a
$$S_2 = 1+\frac{1}{2}$$
$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{2}{2},$$
$$S_8 = S_4 + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) \geqslant S_4 + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) \geqslant 2+\frac{1}{2} = 1+\frac{3}{2},$$
....
$$S_{2^n} = S_{2^{n-1}} + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \geqslant S_{2^{n-1}} + \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \geqslant 1+\frac{n}{2}$$
Donc la suite $(S_{2^n})_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$ quand $n\to+\infty$. On en déduit que la série harmonique diverge.

Théorème 1.1.11. — *i) La série géométrique*
$$\sum_{k\geqslant 0} q^k, \qquad q\in\mathbf{C}$$
converge si et seulement si $|q|<1$.

ii) Si $|q|<1$, on a
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$
et
$$R_n = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Démonstration. — Supposons d'abord que $|q| \geqslant 1$. Alors la suite $u_k = q^k$ diverge et par le Corollaire 1.1.8 la série diverge également.

Supposons maintenant que $|q| < 1$. On a

$$S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Comme $|q| < 1$, on a $|q^n| = |q|^n \to 0$ quand $n \to \infty$, d'où $q^n \to 0$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{1}{q-1} = \frac{1}{1-q}.$$

On calcule le reste directement par définition :

$$R_n = S - S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

□

1.2. Séries à termes dans un espace vectoriel

1.2.1. Rappels. — Dans cette section, nous expliquons comment généraliser les notions de la section précédente au cas des séries à termes dans un espace vectoriel. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On note $\|\cdot\|$ une norme sur E.

Exemple 1.2.2. — Un exemple archétypique est fourni par les espaces

$$E = K^m, \qquad K = \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C},$$

munis de la norme euclidienne

$$\|\vec{u}\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |u_i|^2\right)^{1/2}, \qquad \vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m).$$

Rappelons qu'une suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de E converge vers un vecteur $\vec{u} \in E$ si et seulement si

$$\|\vec{u} - \vec{u}_n\| \to 0, \qquad \text{quand } n \to +\infty\ .$$

Comme toutes les normes non-triviales sur E sont équivalentes, elle définissent la même topologie sur E, et la convergence d'une série ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$.

On dispose du critère suivant.

***Théorème 1.2.3. —* (critère de Cauchy pour les suites).** *Soit $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans E. Alors elle converge dans E si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $p, q \geqslant N_\varepsilon$ on a*

$$\|\vec{u}_p - \vec{u}_q\| < \varepsilon.$$

Définition. — *i) Une série à termes dans un espace vectoriel E est une écriture de la forme*

$$\sum_{k\geqslant 0} \vec{u}_k,$$

où $(\vec{u}_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite dans E.

ii) On appelle somme partielle de la série $\sum_{k\geqslant 0} \vec{u}_k$ au rang n la somme

$$\vec{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \vec{u}_k.$$

iii) On dit que $\sum_{k\geqslant 0} \vec{u}_k$ converge vers un élément $\vec{S} \in E$ si la suite $(\vec{S}_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\vec{S}$. La limite $\vec{S} = \lim_{n\to+\infty} \vec{S}_n$ est appelée somme de la série et notée

$$\vec{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k.$$

On appelle reste de rang n la différence

$$\vec{R}_n = \vec{S} - \vec{S}_n.$$

On dispose de la version suivante du critère de Cauchy.

Théorème 1.2.4. — **(critère de Cauchy pour les séries).** *Soit* $\sum_{k \geqslant 0} \vec{u}_k$ *une série dans* E*. Alors elle converge si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ *tel que pour tous* $p > q \geqslant N_\varepsilon$ *on a*

$$\| \sum_{k=q+1}^{p} \vec{u}_k \| < \varepsilon.$$

Démonstration. — Par le critère de Cauchy pour les suite, la série converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $p, q \geqslant N_\varepsilon$ on a

$$\|\vec{S}_p - \vec{S}_q\| < \varepsilon.$$

Pour fixer la notation, on peut toujours supposer que $p > q$. Alors

$$\vec{S}_p - \vec{S}_q = \sum_{k=q+1}^{p} \vec{u}_k.$$

La formule précédente s'écrit donc

$$\| \sum_{k=q+1}^{p} \vec{u}_k \| < \varepsilon$$

et le théorème est prouvé. □

Proposition 1.2.5. — *Supposons que la série* $\sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k$ *converge. Alors*

$$\lim_{k \to +\infty} \vec{u}_k = 0.$$

Démonstration. — La preuve de cette proposition est exactement la même que celle de la Proposition 1.1.7. □

Proposition 1.2.6. — **(Opérations sur les suites convergentes)** *i) Si deux séries* $\sum_{k \geqslant 0} \vec{u}_k$ *et* $\sum_{k \geqslant 0} \vec{v}_k$ *convergent, alors leur somme* $\sum_{k \geqslant 0} (\vec{u}_k + \vec{v}_k)$ *converge. De plus,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\vec{u}_k + \vec{v}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k + \sum_{k=0}^{\infty} \vec{v}_k.$$

ii) Si une série $\sum_{k \geqslant 0} \vec{u}_k$ *converge, alors pour tout* $\lambda \in K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ *la série* $\sum_{k \geqslant 0} \lambda \vec{u}_k$ *converge. De plus,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda \vec{u}_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k.$$

Démonstration. — i) Supposons que les séries $\sum_{k \geqslant 0} \vec{u}_k$ et $\sum_{k \geqslant 0} \vec{v}_k$ convergent vers $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ respectivement. On pose

$$\vec{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \vec{v}_k, \qquad \vec{S}'_n = \sum_{k=0}^{n} \vec{v}_k, \qquad \forall n \geqslant 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe N_1 et $N_2 \in \mathbf{N}$ tels que

$$\|\vec{S} - \vec{S}_n\| < \varepsilon/2, \qquad \text{si } n \geqslant N_1$$

et

$$\|\vec{S}' - \vec{S}'_n\| < \varepsilon/2, \qquad \text{si } n \geqslant N_2.$$

Soit $N_\varepsilon = \max\{N_1, N_2\}$.

Alors pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ on a

$$\|\vec{S} + \vec{S}' - \sum_{k=0}^{n} (\vec{u}_k + \vec{v}_k)\| = \|(\vec{S} - \vec{S}_n) + (\vec{S}' - \vec{S}'_n)\| \leqslant \|\vec{S} - \vec{S}_n\| + \|\vec{S}' - \vec{S}'_n\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Donc la série $\sum_{k \geqslant 0} (\vec{u}_k + \vec{v}_k)$ converge vers $\vec{S} + \vec{S}'$.

ii) Supposons que $\sum_{k \geqslant 0} \vec{u}_k$ converge vers $\vec{S}$. Nous voulons prouver que $\sum_{k \geqslant 0} \lambda \vec{u}_k$ converge vers $\lambda \vec{S}$. Si $\lambda = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons que $\lambda \neq 0$ et posons $\vec{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \vec{v}_k$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\|\vec{S} - \vec{S}_n\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Donc

$$\|\lambda\vec{S} - \sum_{k=0}^{n} \lambda\vec{u}_k\| = \|\lambda(\vec{S} - \vec{S}_n)\| = |\lambda| \cdot \|\vec{S} - \vec{S}_n\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

Donc $\sum_{k\geqslant 0} \lambda\vec{u}_k$ converge vers $\lambda\vec{S}$. □

1.2.7. Convergence absolue. — Nous introduisons la notion de convergence absolue qui joue un rôle très important dans toute la théorie.

Définition. — *On dit qu'une série* $\sum_{k\geqslant 0} \vec{u}_k$ *converge absolument dans E si la série numérique*

$$\sum_{k\geqslant 0} \|\vec{u}_k\|$$

converge dans $\mathbf{R}$.

Proposition 1.2.8. — *Si une série converge absolument, alors elle converge.*

Démonstration. — On applique le critère de Cauchy pour les séries. Supposons qu'une série $\sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k$ converge absolument. Alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} \|\vec{u}_k\|$ converge. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, par le critère de Cauchy, il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $p > q \geqslant N_\varepsilon$

$$\sum_{k=q+1}^{p} \|\vec{u}_k\| < \varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\|\sum_{k=q+1}^{p} \vec{u}_k\| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \|\vec{u}_k\| < \varepsilon.$$

Donc la série $\sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k$ converge par le critère de Cauchy. □

1.3. Séries numériques. Généralités

Nous revenons maintenant à l'étude des séries numériques. La proposition suivante est un cas particulier de la Proposition 1.3.1 :

Proposition 1.3.1. — **(Opérations sur les suites numériques convergentes)** *i) Si deux séries numériques* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *et* $\sum_{k\geqslant 0} v_k$ *convergent, alors leur somme* $\sum_{k\geqslant 0} (u_k + v_k)$ *converge. De plus,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

ii) Si une série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *converge, alors pour tout* $\lambda \in K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ *la série* $\sum_{k\geqslant 0} \lambda u_k$ *converge. De plus,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

Remarque 1.3.2. — *Si* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *est convergente et* $\sum_{k\geqslant 0} v_k$ *est divergente, alors* $\sum_{k\geqslant 0} (u_k + v_k)$ *est divergente. On peut démontrer cela par l'absurde. Supposons que* $\sum_{k\geqslant 0} (u_k + v_k)$ *converge. Alors par la Proposition 1.3.1 la série*

$$\sum_{k\geqslant 0} (u_k + v_k) - \sum_{k\geqslant 0} u_k = \sum_{k\geqslant 0} v_k$$

est convergente, ce qui contredit l'hypothèse.

Pour les suites numériques, la définition de la convergence absolue s'écrit comme suit.

Définition. **—** *On dit qu'une série numérique* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *est absolument convergente si et seulement si la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$$

est convergente.

Alors la proposition suivante est un cas particulier de la Proposition 1.2.8.

Proposition 1.3.3. **—** *Toute suite numérique absolument convergente est convergente.*

La réciproque de cette proposition est en général fausse. Il existe des séries convergentes sans être absolument convergentes.

Définition. **—** *Si une série est convergente, mais non absolument convergente, elle est dite semi-convergente.*

Nous donnerons des exemples de séries semi-convergentes dans la Section 1.3.4 ci-dessous.

1.3.4. Séries alternées. —

Définition. **—** *On appelle série alternée toute série de l'une des formes*

$$\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k u_k,$$

ou

$$\sum_{k\geqslant 0} (-1)^{k+1} u_k,$$

avec $u_k \geqslant 0$ *pour tout* $k \geqslant 0$.

Nous prouvons maintenant que pour les séries alternées la condition nécessaire de convergence de la Proposition 1.1.7 est suffisante.

Théorème 1.3.5. **— (règle de Leibnitz)** *Soit* $(u_k)_{k\geqslant 0}$ *une suite décroissante telle que* $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$. *Alors la suite alternée*

$$\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k u_k$$

converge. De plus, si R_n *est son reste de rang* n, *alors il est du signe de son premier terme, i.e.*

$$(-1)^{n+1} R_n \geqslant 0,$$

et

$$|R_n| < u_{n+1}.$$

Démonstration. — 1) Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

Alors, en utilisant utilise la décroissance de la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$, on trouve :

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + (-1)^{2n} u_{2n} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = S_{2n-1} + u_{2n} - u_{2n+1} \geqslant S_{2n-1},$$

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = S_{2n} - u_{2n+1} + u_{2n+2} \leqslant S_{2n},$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = S_{2n} - u_{2n+1} \leqslant S_{2n}.$$

On en déduit que la suite (S_{2n+1}) croît et que la suite (S_{2n}) décroît. De plus, (S_{2n+1}) est majorée par $S_0 = u_0$ et (S_{2n}) est minorée par S_1. Donc les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) convergent. Comme $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$, ces suites ont la même limite S, ce qui prouve que la suite (S_n) converge elle-même vers S. Donc on a prouvé que la série $\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k u_k$ converge.

2) Les inégalités précédentes donnent

$$S_{2n-1} \leqslant S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2} \leqslant S_{2n}.$$

On en déduit que

$$0 \geqslant R_{2n} = S - S_{2n} \geqslant S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}$$

et

$$0 \leqslant R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}.$$

Donc pour tout $n \geqslant 0$ on a $(-1)^{n+1}R_n \geqslant 0$ et $|R_n| \leqslant u_{n+1}$. □

***Exemple 1.3.6.* —** La série harmonique alternée est la série

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}.$$

On voit qu'elle s'écrit sous la forme $\sum\limits_{k\geqslant 0} (-1)^k u_k$ avec $u_k = 1/k$. Par la règle de Leibnitz, cette série converge, et pour le reste R_n on a $|R_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Cela donne un exemple d'une série convergente qui ne converge pas absolument.

Grâce à la règle de Leibnitz, il est facile de donner d'autres exemples de séries semi-convergentes.

1.4. Comparaisons de séries à termes positifs

***Proposition 1.4.1.* —** *Soient $(u_k)_{k\geqslant 0}$ et $(v_k)_{k\geqslant 0}$ deux suites à termes positifs. Si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_k$ converge, alors la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge, et on a :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Démonstration. — On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

De $v_k \geqslant u_k \geqslant 0$ on déduit que les suites $(S_n)_{n\geqslant 0}$ et $(T_n)_{n\geqslant 0}$ sont croissantes et que $S_n \leqslant T_n$. Comme la suite T_n converge, elle est majorée. Donc $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante et majorée. On en déduit qu'elle converge.

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité $S_n \leqslant T_n$, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

□

***Corollaire 1.4.2.* —** *Soient $(u_k)_{k\geqslant 0}$ et $(v_k)_{k\geqslant 0}$ deux suites à termes positifs. Si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ diverge, alors la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_k$ diverge également.*

***Exemple 1.4.3.* —** On étudie la série

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Comme $\sqrt{k} \leqslant k$ pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{k}.$$

La série de terme général $\frac{1}{k}$ diverge (cf. Exemple 1.1.10). Donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge.

Soient $(u_k)_{k\geqslant 0}$ et $(v_k)_{k\geqslant 0}$ deux suites telles que u_k et v_k sont non nuls à partir d'un certain rang. On dit qu'elles sont équivalentes et on écrit $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} v_k$ si et seulement si

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_k}{v_k} = 1.$$

***Théorème 1.4.4.* —** *Soient $(u_k)_{k\geqslant 0}$ et $(v_k)_{k\geqslant 0}$ deux suites équivalentes. Supposons qu'il existe un rang N tel que pour tout $k \geqslant N$ les termes u_k et v_k sont de même signe. Alors les séries $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_k$ convergent ou divergent en même temps.*

Démonstration. — Pour fixer les idées, supposons que $u_k, v_k > 0$ pour tout $k \geqslant N$. Quitte a remplacer $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum_{k\geqslant 0} v_k$ par $\sum_{k\geqslant N} u_k$ et $\sum_{k\geqslant N} v_k$ (cf. Proposition 1.1.6), on peut supposer que $N = 0$, i.e. que $u_k, v_k > 0$ pour tous $k \geqslant 0$.

Comme $\lim_{k\to+\infty} \frac{u_k}{v_k} = 1$, il existe $M \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geqslant M$ on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_k}{v_k} \leqslant 2.$$

Donc

$$\frac{v_k}{2} \leqslant u_k \leqslant 2v_k, \qquad \forall k \geqslant M.$$

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Les suites $(S_n)_{n\geqslant 0}$ et $(T_n)_{n\geqslant 0}$ sont croissantes, et on a :

$$\frac{T_n}{2} \leqslant S_n \leqslant 2T_n, \qquad \forall k \geqslant M.$$

Supposons que la série $\sum_{k\geqslant 0} v_k$ converge. Alors la suite $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée, et l'inégalité précédente montre que la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée et croissante. Donc $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Réciproquement, si la série $\sum_{k\geqslant 0} v_k$ converge, alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée, et l'inégalité précédente montre que la suite $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée et croissante. On en déduit qu'elle converge. □

***Exemple 1.4.5.* —** La série

$$\sum_{k\geqslant 0} \sin\left(\frac{1}{2^k}\right)$$

est convergente. En effet, comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a

$$\sin\left(\frac{1}{2^k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^k},$$

et la série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k}$ converge par le Théorème 1.1.11.

***Exemple 1.4.6.* —** La série

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{k^2+1}{k^3+k+1}$$

diverge. En effet, posons $u_k = \frac{k^2+1}{k^3+k+1}$ et $v_k = \frac{1}{k}$. Alors $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} v_k$, et la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ diverge (cf. Exemple 1.1.10).

1.5. Règles de d'Alembert et de Cauchy

Dans cette section, on montre les règles de d'Alembert et de Cauchy, qui donnent des conditions suffisantes de convergence d'une série à termes positifs.

***Théorème 1.5.1.* — (règle de d'Alembert)** *Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\mathbf{R}_+$.*

i) Si

$$\lim_{k\to+\infty} \sup \frac{u_{k+1}}{u_k} < 1,$$

alors la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge.

ii) Si

$$\lim_{k\to+\infty} \sup \frac{u_{k+1}}{u_k} > 1,$$

alors la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ diverge.

Démonstration. — i) Soit $\ell = \lim_{k\to+\infty}\sup \frac{u_{k+1}}{u_k}$. Supposons que $\ell < 1$. On fixe un nombre réel $q \in]\ell, 1[$. Alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q.$$

Donc $u_{n+1} \leqslant u_n q$ pour tout $n \geqslant N$. Par récurrence on en déduit que

$$u_{N+m} \leqslant u_N q^m, \qquad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Cette inégalité montre que la série positive

$$\sum_{k\geqslant N} u_k = \sum_{k\geqslant 0} u_{N+k}$$

est majorée par la série géométrique

$$\sum_{k\geqslant N} u_N q^{k-N} = \sum_{k\geqslant 0} u_N q^{N+k} = u_N q^N \sum_{k\geqslant 0} q^k.$$

Comme $0 < q < 1$, la série $\sum\limits_{k\geqslant N} u_N q^{k-N}$ converge. On en déduit que la série $\sum\limits_{k\geqslant N} u_k$ converge également, d'où l'assertion.

ii) Supposons que $\ell > 1$. On fixe un nombre réel $q \in]1, \ell[$. Alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > q.$$

Donc $u_{n+1} \geqslant u_n q$ pour tout $n \geqslant N$. Par récurrence on en déduit que

$$u_{N+m} \geqslant u_N q^m, \qquad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Cette inégalité montre que la série positive

$$\sum_{k\geqslant N} u_k = \sum_{k\geqslant 0} u_{N+k}$$

est minorée par la série géométrique

$$\sum_{k\geqslant N} u_N q^{k-N} = \sum_{k\geqslant 0} u_N q^{N+k} = u_N q^N \sum_{k\geqslant 0} q^k.$$

Comme $q > 1$, la série $\sum\limits_{k\geqslant N} u_N q^{k-N}$ diverge. On en déduit que la série $\sum\limits_{k\geqslant N} u_k$ diverge également, d'où l'assertion. □

***Corollaire 1.5.2.* —** *Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\mathbf{R}_+$ telle que la suite $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ converge vers $\ell \in \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$. Si $l < 1$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge. Si $l > 1$, elle diverge.*

***Exemple 1.5.3.* —** On étudie la convergence de la série

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

Soit $u_k = \frac{2^k k!}{k^k}$. Alors

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2^{k+1}(k+1)!\cdot k^k}{(k+1)^{k+1}2^k k!} = \frac{2(k+1)k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{2\cdot k^k}{(k+1)^k} = \frac{2}{(1+\frac{1}{k})^k}.$$

Comme $\lim_{k\to+\infty}(1+\frac{1}{k})^k = e$, on trouve que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2}{e} < 1.$$

On en déduit que la série converge.

***Théorème 1.5.4.* — (règle de Cauchy)** *Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\mathbf{R}_+$.*

i) Si

$$\lim_{k\to+\infty}\sup \sqrt[k]{u_k} < 1,$$

alors la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge.

ii) Si

$$\lim_{k\to+\infty} \sup \sqrt[k]{u_k} > 1,$$

alors la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *diverge.*

Démonstration. — i) Soit $\ell = \lim_{k\to+\infty} \sup \sqrt[k]{u_k}$. Supposons que $\ell < 1$. On fixe un nombre réel $q \in]\ell, 1[$. Alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$

$$\sqrt[n]{u_n} < q.$$

Donc $u_n \leqslant q^n$ pour tout $n \geqslant N$. Cette inégalité montre que la série positive

$$\sum_{k\geqslant N} u_k$$

est majorée par la série géométrique

$$\sum_{k\geqslant N} q^k.$$

Comme $0 < q < 1$, la série $\sum_{k\geqslant N} q^k$ converge. On en déduit que la série $\sum_{k\geqslant N} u_k$ converge également, d'où l'assertion.

ii) Supposons que $\ell > 1$. On fixe un nombre réel $q \in]1, \ell[$. Alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$

$$\sqrt[n]{u_n} > q.$$

Donc $u_n \geqslant q^n$ pour tout $n \geqslant N$. Cette inégalité montre que la série positive

$$\sum_{k\geqslant N} u_k$$

est minorée par la série géométrique

$$\sum_{k\geqslant N} q^k.$$

Comme $q > 1$, la série $\sum_{k\geqslant N} q^k$ diverge. On en déduit que la série $\sum_{k\geqslant N} u_k$ diverge également. □

Corollaire 1.5.5. — *Soit* $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *une suite dans* $\mathbf{R}_+$ *telle que la suite* $\sqrt[k]{u_k}$ *converge vers* $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. *Si* $l < 1$, *la série* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *converge. Si* $l > 1$, *elle diverge.*

Exemple 1.5.6. — On étudie la convergence de la série

$$\sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}.$$

On a

$$u_k = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} < 1.$$

Donc la série converge.

1.6. Comparaison séries-intégrales

Soit $[a, b[$ un intervalle ouvert, où $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[a, b[$. Pour tout $x \in [a, b[$ on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors $F(x)$ est une fonction continue sur $[a, b[$.

Définition. — *On dit que l'intégrale*

$$\int_a^b f(t)dt$$

converge sur $]a,b[$ *si et seulement si la fonction* $F(x)$ *admet une limite finie en* b*. Si c'est le cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} F(x) = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt.$$

Sinon, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ *diverge.*

On laisse au lecteur le soin de modifier cette définition pour qu'elle s'applique aux fonctions continues sur les intervalles de la forme $]a,b]$ où $a \in \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$, $b \in \mathbf{R}$.

Exemple 1.6.1. — Soit $\alpha > 0$ un nombre positif fixé et soit $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. On a

$$\int f(t)dt = \int \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln(x)+C & \text{if } \alpha = 1,\\ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}+C & \text{if } \alpha \neq 1,\end{cases}$$

où $C \in \mathbf{R}$ est une constante. On étudie la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Si $\alpha = 1$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x) \to +\infty \qquad \text{quand } x \to +\infty.$$

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge.

Si $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left.\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Si $0 < \alpha < 1$, alors $1-\alpha > 0$ et $x^{1-\alpha} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge si $0 < \alpha < 1$.

Si $\alpha > 1$, alors $1-\alpha < 0$ et $x^{1-\alpha} \to 0$ quand $x \to +\infty$. On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}, \qquad \text{si } \alpha > 1.$$

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 1.6.2. — *Soit* $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *une fonction continue décroissante. Alors*

i) La série numérique

$$\sum_{k\geqslant 0} f(k)$$

et l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt$$

sont de même nature, i.e. la série est convergente si et seulement si l'intégrale est convergente.

ii) Si la série converge, on a l'encadrement suivant pour le reste de rang n :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

iii) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$*. Alors la suite*

$$a_n = S_n - \int_0^{n+1} f(t)dt$$

croît et converge dans $\mathbf{R}_+$.

iv) Si la série diverge, alors

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^n f(t)dt.$$

Démonstration. — i) Comme la fonction f est décroissante, pour tout $k \in \mathbf{N}$ on a

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k). \tag{2}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leqslant f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt = f(0) + \int_0^n f(t)dt,$$

et

$$\int_0^{n+1} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) = S_n.$$

Donc on a prouvé les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &\leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt, \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \\ \int_0^{n+1} f(t)dt &\leqslant S_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Supposons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et posons $A = \int_0^{+\infty} f(t)dt$. Comme la fonction f est positive, la suite $\int_0^n f(t)dt$ est croissante, d'où

$$S_n \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt \leqslant f(0) + A, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Donc la suite (S_n) est bornée. Comme elle est croissante, on en déduit qu'elle converge. Nous avons démontré que la convergence de l'intégrale implique la convergence de la série.

Réciproquement, supposons que la série converge vers $S \in \mathbf{R}_+$. Alors $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante qui converge vers S. Soit $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Alors $F(x)$ est une fonction croissante, et pour montrer qu'elle admet une limite quand $x \to +\infty$ il suffit de montrer qu'elle est bornée. Or la formule (3) nous donne

$$\int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant S_n \leqslant S.$$

On en déduit que $F(x) \leqslant S$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

ii) Pour encadrer le reste R_n nous utilisons encore les inégalités (2). On a

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k+1) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_n^{+\infty} f(t)dt$$

et

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt.$$

iii) On écrit a_n sous la forme

$$a_n = S_n - \int_0^{n+1} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} (f(k) - f(t))dt.$$

On pose

$$b_k = \int_k^{k+1} (f(k) - f(t))dt.$$

Comme $f(k) - f(t) \geqslant 0$ si $t \geqslant k$, on voit que $b_k \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Donc la suite (a_n) est croissante. D'autre part, comme $f(t) \geqslant f(k+1)$ pour tout $t \in [k, k+1]$, on a

$$b_k \leqslant \int_k^{k+1} (f(k) - f(k+1))dt = f(k) - f(k+1).$$

Donc

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} (f(k) - f(k+1)) = f(0) - f(n+1) \leqslant f(0),$$

d'où on déduit que $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée, ce qui implique la convergence.

iv) Si la série $\sum_{k\geqslant 0} f(k)$ diverge, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Comme la suite

$$a_n = S_n - \int_0^{n+1} f(t)dt$$

est bornée, cela implique que

$$\frac{\int_0^{n+1} f(t)dt}{S_n} \to 1, \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

On a

$$\int_0^{n+1} f(t)dt = \int_0^n f(t)dt + \int_n^{n+1} f(t)dt,$$

où

$$0 \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant \int_n^{n+1} f(0)dt = f(0).$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_n^{n+1} f(t)dt}{S_n} = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^n f(t)dt}{S_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{n+1} f(t)dt}{S_n} - \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_n^{n+1} f(t)dt}{S_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{n+1} f(t)dt}{S_n} = 1.$$

□

1.6.3. La série de Riemann. — Soit $\alpha > 0$. Nous étudions la série de terme général $u_k = 1/k^\alpha$, dite série de Riemann :

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Proposition 1.6.4. — *La série de Riemann diverge si $\alpha \leqslant 1$ et converge si $\alpha > 1$.*

Démonstration. — On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{(x+1)^\alpha}$. Alors $f(x)$ vérifie les conditions du Théorème 1.6.2 et

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k\geqslant 0} f(k).$$

D'autre part, on a vu que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^\alpha} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$ (cf. Exemple 1.6.1). On en déduit la proposition. □

Maintenant nous étudions plus en détail la série harmonique

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$$

Proposition 1.6.5. — *Il existe une constante γ telle que pour tout $n \geqslant 1$*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \alpha_n,$$

où $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. La constante γ est appelée la constante d'Euler.

Démonstration. — Soit $f(t) = \frac{1}{t+1}$. On note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

la somme partielle au rang n. On a

$$\int_0^{n-1} f(t)dt = \int_0^{n-1} \frac{dt}{t+1} = \ln(t+1)|_0^{n-1} = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n).$$

Par le Théorème 1.6.2 iii), la suite

$$a_n = S_n - \ln(n)$$

converge dans $\mathbf{R}_+$. On pose $\gamma = \lim_{n\to+\infty} a_n$ et $\alpha_n = a_n - \gamma$. Alors $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et

$$S_n - \ln(n) = \gamma + \alpha_n.$$

□

Remarque. On a $\gamma = 0,5772...$

1.7. Le critère d'Abel

Le critère d'Abel généralise la règle de Leibnitz pour les séries alternées (cf. Théorème 1.3.5. Il a notamment l'avantage,contrairement à ce dernier,d'être utilisable dans le cas complexe. Nous commençons par le lemme suivant qui est important en soi.

***Lemme 1.7.1.* — (transformation d'Abel)** *Soient $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ deux suites. On pose*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1}) + B_n a_n, \qquad n \geqslant 1.$$

Démonstration. — On a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}.$$

En remplaçant $\sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}$ par $\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k$ et b_0 par B_0, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k =$$

$$= B_0(a_0 - a_1) + \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1}) + a_n B_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1}) + a_n B_n.$$

□

***Théorème 1.7.2.* — (critère d'Abel)** *Soient $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ deux suites. Chacune des conditions a) et b) ci-après est suffisante pour que la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k b_k$ converge.*

a) La suite

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

est bornée et $(a_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite décroissante positive et telle que $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

b) Le série $\sum_{k\geqslant 0} b_k$ converge et $(a_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite décroissante positive.

Démonstration. — a) Supposons que la condition a) est remplie. On fixe une constante M telle que $\sup_{n\geqslant 0} |B_n| \leqslant M$. D'abord on montre que la série

$$\sum_{k\geqslant 0} B_k(a_k - a_{k+1})$$

converge absolument. En effet, comme $(a_k)_{k\geqslant 0}$ est strictement décroissante, on a

$$\sum_{k=0}^{n} |B_k(a_k - a_{k+1})| = \sum_{k=0}^{n} |B_k|(a_k - a_{k+1}) \leqslant \sum_{k=0}^{n} M(a_k - a_{k+1}) = M \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = M(a_0 - a_{n+1}) \leqslant M a_0.$$

Donc la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} |B_k(a_k - a_{k+1})|$ est majorée, d'où on déduit que la série $\sum_{k\geqslant 0}^{n} |B_k(a_k - a_{k+1})|$ converge. Par conséquence, la série $\sum_{k\geqslant 0} B_k(a_k - a_{k+1})$ converge absolument.

On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

et
$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} B_k(a_k - a_{k+1}).$$
La transformation d'Abel donne
$$S_n = S'_n + B_n a_n.$$
On sait que la suite $(S'_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Comme $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, la suite $(B_n a_n)_{n\to+\infty}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On en déduit que la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge, ce qui montre le théorème dans le cas a).

b) Supposons que la condition b) est remplie. Comme la suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ est positive est décroissante, elle converge vers $\ell \in \mathbf{R}_+$. D'autre part, la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, puisque convergente. Comme ci-dessus on en déduit que la série
$$\sum_{k\geqslant 0} B_k(a_k - a_{k+1})$$
est absolument convergente, donc convergente. Soit $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k(a_k - a_{k+1})$. La transformation d'Abel donne
$$S_n = S'_n + B_n a_n.$$
On a prouvé que la série $(S'_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Comme, par hypothèse, les suites $(B_n)_{n\geqslant 0}$ et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ convergent, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge également, ce qui montre le théorème dans le cas b). □

Exemple 1.7.3. — Soient $(a_k)_{k\geqslant 0}$ une suite décroissante telle que $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ et $b_k = (-1)^k$. Alors
$$B_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Donc $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, et le théorème 1.7.2 implique que la série
$$\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k a_k$$
converge. Donc on retombe sur le critère de convergence pour les séries alternées démontré dans le Théorème 1.3.5.

Exemple 1.7.4. — Soit $b_k = e^{ki\theta}$. Nous supposons que $\theta \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$. Donc $e^{i\theta} \neq 1$. Alors
$$B_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ki\theta} = \frac{1 - e^{(n+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$
On remarque que
$$1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -2ie^{i\theta/2}\sin(\theta/2)$$
et
$$1 - e^{(n+1)i\theta} = e^{(n+1)i\theta/2}(e^{-(n+1)i\theta/2} - e^{(n+1)i\theta/2}) = -2ie^{(n+1)i\theta/2}\sin((n+1)\theta/2).$$
Donc
$$B_n = \frac{2ie^{(n+1)i\theta/2}\sin((n+1)\theta/2)}{2ie^{i\theta/2}\sin(\theta/2)} = e^{ni\theta/2}\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$
et
$$|B_n| = \left|\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}.$$
On en déduit que la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

Le théorème 1.7.2 implique que pour toute suite décroissante $(a_k)_{k\geqslant 0}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$, la série
$$\sum_{k\geqslant 0} e^{ki\theta} a_k$$
converge. En particulier, pour tout réel $\alpha > 0$, la série
$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{e^{ki\theta}}{n^\alpha}$$
converge.

Nous donnons maintenant une majoration du reste R_n. Pour tous k,m tels que $k \geqslant n+1$, on pose

$$B_{n,k} = \sum_{i=n+1}^{k} b_i.$$

***Proposition 1.7.5.* —** *Soient $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ deux suites vérifiant l'une des conditions a) et b) du Théorème 1.7.2. Soit R_n le reste de rang n de la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k b_k$. Alors*

$$|R_n| \leqslant M_{n+1} a_{n+1},$$

où

$$M_{n+1} = \sup_{k\geqslant n+1} |B_{n,k}|.$$

Démonstration. — Pour tout $m \geqslant n+1$ on pose

$$R_{n,m} = \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k.$$

Par la transformation d'Abel, on a

$$R_{n,m} = \sum_{k=n+1}^{m-1} B_{n,k}(a_k - a_{k+1}) + B_{n,m} a_m.$$

Comme $a_k \geqslant a_{k+1} \geqslant 0$, on trouve que

$$\begin{aligned} |R_{n,m}| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m-1} |B_{n,k}(a_k - a_{k+1})| + |B_{n,m} a_m| = \sum_{k=n+1}^{m-1} |B_{n,k}|(a_k - a_{k+1}) + |B_{n,m}| a_m \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=n+1}^{m-1} M_{n+1}(a_k - a_{k+1}) + M_{n+1} a_m = M_{n+1}(a_{n+1} - a_m) \leqslant M_{n+1} a_{n+1}. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $m \to +\infty$, on en déduit que

$$|R_n| \leqslant M_{n+1} a_{n+1}.$$

□

CHAPITRE 2

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

2.1. Suites de fonctions. Convergence uniforme

2.1.1. Convergence simple et convergence uniforme. — Soit $X \subset \mathbf{R}$ une partie de $\mathbf{R}$ et soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions sur X :

$$f_n : X \to \mathbf{R}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

***Définition*. —** *i) On dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur X si et seulement si pour tout $x \in X$ la limite*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

existe dans $\mathbf{R}$. Dans ce cas, la fonction

$$f : X \to \mathbf{R},$$

définie par

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

est appelée limite simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$. On dit que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f et on écrit

$$f = \lim_{n\to+\infty} f_n$$

ou

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\to} f.$$

Les propriétés suivantes découlent directement de la définition et des propriétés analogues des suites numériques.

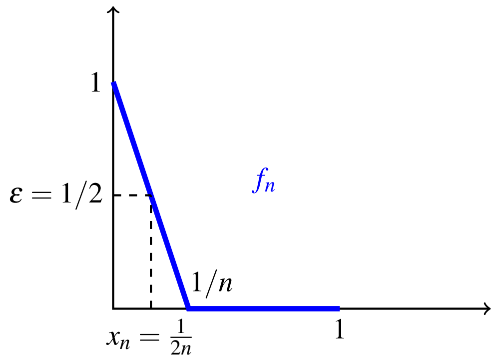
1) Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g_n)_{n\geqslant 0} : X \to \mathbf{R}$ convergent simplement vers f et g respectivement, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $\lambda f + \mu g$.
2) Soit $Y \subset \mathbf{R}$ et soit $h : Y \to X$ une application. Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers f, alors $(f_n \circ h)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $f \circ h$.

***Définition*. —** *On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformement vers une fonction f : $X \to \mathbf{R}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$*

$$\forall x \in X, \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (CU)$$

***Exemple 2.1.2*. —** On considère la suite $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{si } x \in [0, 1/n], \\ 0, & \text{si } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$



On montre d'abord que cette suite converge vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 1, \\ 0, & \text{si } x \in (0,1]. \end{cases}$$

En effet, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 1, \\ 1 - nx, & \text{si } x \in (0, 1/n], \\ 0, & \text{si } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Soit $x \in (0,1]$. Alors il existe $N_x \in \mathbf{N}$ tel que $1/N_x < x$, et pour tout $n \geqslant N_x$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Donc $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(x) = 0$. D'autre part, il est clair que $(f_n(0))_{n\geqslant 0}$ converge vers $f(0)$. Donc $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers f sur $[0,1]$.

Maintenant on montre que la convergence n'est pas uniforme. Soit $\varepsilon = 1/2$. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $x_n = \frac{1}{2n}$. Alors

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

pour tout $n \geqslant 1$. Donc la condition (CU) n'est pas remplie pour $\varepsilon = 1/2$.

On peut remarquer que la fonction f n'est pas continue, bien que les fonctions f_n sont continues.

Proposition 2.1.3. — *i) Supposons que les suites $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(g_n)_{n\geqslant 0} : X \to \mathbf{R}$ convergent uniformément vers f et g respectivement. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$.*

ii) Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $f(x)$, alors $(|f_n|)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $|f|$.

Démonstration. — i) Soit $\varepsilon > 0$. Nous supposons que l'un au moins des nombres $\lambda, \mu \in R$ est non-nul. Alors $|\lambda| + |\mu| \neq 0$.

Il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$

$$\forall x \in X, \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}.$$

De même, il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$

$$\forall x \in X, \qquad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}.$$

On pose $N_\varepsilon = \max\{N_1, N_2\}$. Alors pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\forall x \in X, \qquad |(\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)) - (\lambda f(x) + \mu g(x))| \leqslant |\lambda| \cdot |f_n(x) - f(x)| + |\mu| \cdot |g_n(x) - g(x)| <$$
$$< \frac{|\lambda|\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} + \frac{|\mu|\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} = \frac{(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} = \varepsilon.$$

Donc $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$.

ii) Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\forall x \in X, \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$||f_n(x)| - |f(x)|| \leqslant |f_n(x) - f(x)|.$$

Donc pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\forall x \in X, \qquad ||f_n(x)| - |f(x)|| < \varepsilon.$$

On en déduit que $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $|f|$. □

Nous donnons maintenant une version uniforme du critère de Cauchy pour les suites de fonctions.

***Définition.* —** *Une suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est dite uniformément de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $m > n \geqslant N_\varepsilon$*

$$\forall x \in X, \qquad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

***Théorème 2.1.4.* — (critère de Cauchy uniforme)** *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément si et seulement si elle est uniformément de Cauchy.*

Démonstration. — a) Supposons que $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\forall x \in X, \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour tous $m, n \geqslant N_\varepsilon$ on a

$$\begin{aligned}\forall x \in X, \qquad |f_n(x) - f_m(x)| &= |(f_n(x) - f(x)) - (f_m(x) - f(x))| \leqslant \\ &\leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

On en déduit que $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est uniformément de Cauchy.

b) Supposons que $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est uniformément de Cauchy. Alors pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy. Donc elle converge vers un nombre réel qu'on note $f(x)$. On en déduit que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction f définie par $x \mapsto f(x)$. Montrons que la convergence est uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_{\varepsilon/2} \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $m > n \geqslant N_{\varepsilon/2}$

$$\forall x \in X \qquad |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En passant à la limite quand $m \to +\infty$, on en déduit que

$$\forall x \in X \qquad |f(x) - f_n(x)| = |\lim_{m\to+\infty} f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f uniformément. □

2.1.5. Continuité et limites uniformes. — Comme on l'a vu dans l'Exemple 2.1.2, la limite d'une suite de fonctions continues n'est pas forcement continue. Le théorème suivant montre que la convergence uniforme assure la continuité de la limite.

***Théorème 2.1.6.* —** *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions. Supposons qu'elle converge uniformément vers une fonction f et que toutes les fonctions f_n sont continues en un point $a \in X$. Alors f est continue en a.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f, il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\forall x \in X, \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On fixe $n \geqslant N_\varepsilon$. Comme f_n est continue, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc pour tout tout $x \in X$ tel que $|x - a| < \delta$ on a

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(a)) + (f_n(a) - f(a))| \leqslant \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

On en déduit que f est continue en a. □

***Corollaire 2.1.7.* —** *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f. Alors f est continue.*

Exemple 2.1.8. — *On considère la suite des fonctions $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies par*

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \qquad n \geqslant 1.$$

Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction continue $f(x) = |x|$. On peut remarquer que la convergence est uniforme. En effet, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| =$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right)\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|\right)} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors tout tout n tel que $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ on a $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ et donc

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2.2. Dérivation et intégration

Théorème 2.2.1. — *Soit $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ ($n \in \mathbf{N}$) une suite de fonctions définies et continues sur un segment fermé $[a,b]$. Supposons que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers une fonction f (qui est continue par le Théorème 2.1.6). Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. En remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{b-a}$ dans la définition de la convergence uniforme, on trouve qu'il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$

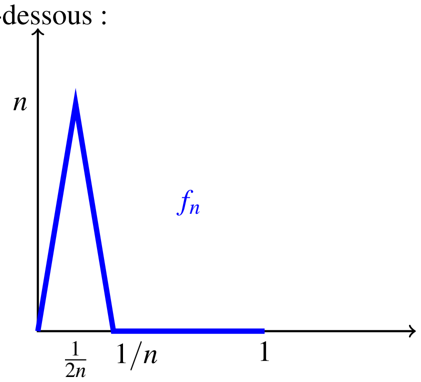
$$\forall x \in [a,b], \qquad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Donc pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx \leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon.$$

Donc la suite $\int_a^b f_n(x)dx$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$. □

Exemple 2.2.2. — On considère la suite de fonctions continues $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ représentées sur le dessin ci-dessous :



Soit $x \in]0,1]$. Alors pour tout n tel que $x > \frac{1}{n}$ on a $f_n(x) = 0$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$ pour tous $x \in [0,1]$. On voit que

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}.$$

Comme $\int_0^1 f(x)dx = 0$, on voit que la suite $\int_0^1 f_n(x)dx$ ne converge pas vers $\int_0^1 f(x)dx$. Cela s'explique par le fait que la convergence $f_n \to f$ n'est pas uniforme. En effet,

$$|f_n(1/2n) - f(1/2n)| = n \to +\infty, \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Cet exemple montre aussi que dans l'énoncé du Théorème 2.2.1, l'hypothèse de convergence uniforme ne peut pas être supprimée.

Théorème 2.2.3. — *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point et $f_n : I \to \mathbf{R}$ $(n \geqslant 0)$ une suite de fonctions dérivables vérifiant les propriétés suivantes :*

a) il existe $c \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(c))_{n\geqslant 0}$ converge ;

b) la suite $(f_n')_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout intervalle fermé et borné $[a,b] \subset I$ vers une fonction g.

Alors

i) La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout intervalle fermé et borné $[a,b] \subset I$ vers une fonction $f : I \to \mathbf{R}$.

ii) La fonction f est dérivable sur I et

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x).$$

Démonstration. — i) On écrit la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sous la forme

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt, \qquad x \in I.$$

Soit $[a,b] \subset I$ un intervalle fermé et borné. Sans perte de généralité on peut supposer que $c \in [a,b]$. On montre que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$. Il suffit de montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est uniformément de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} f_n(c)$. Par le critère de Cauchy pour les suites (cf. Théorème 1.2.3), il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $m \geqslant n \geqslant N_1$

$$|f_m(c) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, comme $(f_n')_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$, il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $m > n \geqslant N_2$

$$\forall t \in [a,b], \qquad |f_m'(t) - f_n'(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Soit $N_\varepsilon = \max\{N_1, N_2\}$. On en déduit que pour tous $m > n \geqslant N_\varepsilon$

$$(4) \quad \forall x \in [a,b], \qquad |f_m(x) - f_n(x)| = \left| f_m(c) + \int_c^x f_m'(t)dt - f_n(c) - \int_c^x f_n'(t)dt \right| =$$

$$\left| (f_m(c) - f_n(c)) + \int_c^x (f_m'(t) - f_n'(t))dt \right| \leqslant |f_m(c) - f_n(c)| + \left| \int_c^x (f_m'(t) - f_n'(t))dt \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_c^x |f_m'(t) - f_n'(t)|dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_c^x \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt \right| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon|x-c|}{2(b-a)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon$$

Donc la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est uniformément de Cauchy sur $[a,b]$. On en déduit que sur $[a,b]$ elle converge uniformément vers une fonction continue f.

ii) On calcule la fonction $f(x)$ en utilisant le Théorème 2.2.1. On a

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt \right) = \lim_{n\to+\infty} f_n(c) + \lim_{n\to+\infty} \int_c^x f_n'(t)dt =$$

$$= \ell + \int_c^x \left(\lim_{n\to+\infty} f_n'(t) \right) dt = \ell + \int_c^x g(t)dt.$$

Donc par le théorème fondamental de l'analyse

$$f'(x) = g(x).$$

Le théorème est démontré. □

2.3. Séries de fonctions

***Définition.* —** *i) On appelle série de fonctions toute écriture de la forme*

$$\sum_{k\geqslant 0} f_k(x),$$

où $f_k : X \to \mathbf{R}$ $(k \geqslant 0)$ est une suite de fonctions définies sur une partie X de $\mathbf{R}$.

ii) On dit que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k(x)$ converge simplement (respectivement uniformément) sur X si la suite des sommes partielles

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \qquad n \geqslant 0$$

converge simplement (respectivement uniformément) vers une fonction $S : X \to \mathbf{R}$. La limite $S(x)$ est appelée somme de la série et notée

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = S(x),$$

On note $R_n(x)$ le reste de rang n :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

Nous commençons par donner le critère de Cauchy uniforme pour les séries de fonctions.

***Définition.* —** *On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k(x)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $m > n \geqslant N_\varepsilon$*

$$\forall x \in X, \qquad |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| < \varepsilon. \qquad\qquad (CCU)$$

***Théorème 2.3.1.* — (critère de Cauchy uniforme pour les séries)** *Soit $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k(x)$ une série de fonctions. Elle converge uniformément sur X si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.*

Démonstration. — Soit $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$. Alors pour tous $m > n$ on a :

$$S_m(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x).$$

Donc la condition (CCU) est équivalente à l'hypothèse que la suite $(S_n(x))_{n\geqslant 0}$ est uniformément de Cauchy. Le théorème découle maintenant du critère de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions (Théorème 2.1.4). □

Les propriétés suivantes découlent directement des théorèmes démontrés dans les sections précédentes.

1. *Si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k(x)$ converge uniformément sur X, alors la suite de fonctions $(f_k)_{k\geqslant 0}$ converge uniformément vers 0 sur X.*

   Démonstration. — Les suites $(S_n(x))_{n\geqslant 0}$ et $(S_{n-1}(x))_{n\geqslant 0}$ converges uniformément vers $S(x)$. Donc la suite $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ converge uniformément vers $S(x) - S(x) = 0$ (cf. Proposition 2.1.3). □

2. *Supposons que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k(x)$ converge simplement sur X. Pour que $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k(x)$ converge uniformément sur X, il faut et il suffit que la suite $(R_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers 0 sur X.*

   Démonstration. — Comme $S_n(x) = S(x) - R_n(x)$, la suite $S_n(x)$ converge uniformément vers $S(x)$ si et seulement si $(R_n(x))_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers 0. □

3. *Si* $\sum_{k\geqslant 0} f_k(x)$ *et* $\sum_{k\geqslant 0} g_k(x)$ *convergent simplement (respectivement uniformément) sur* X, *alors* $\sum_{k\geqslant 0}(f_k(x)+g_k(x))$ *converge simplement (respectivement uniformément) sur* X. *De plus*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(f_k(x)+g_k(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x).$$

Démonstration. — Cela découle de la Proposition 2.1.3. □

4. *Si* $\sum_{k\geqslant 0} f_k(x)$ *converge simplement (respectivement uniformément) sur* X, *alors pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}$ *la série* $\sum_{k\geqslant 0} \lambda f_k(x)$ *converge simplement (respectivement uniformément) sur* X. *De plus*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda f_k(x) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

Démonstration. — Cela découle de la Proposition 2.1.3. □

***Théorème 2.3.2.* —** *Supposons que la série* $\sum_{k\geqslant 0} f_k(x)$ *converge simplement sur* X *et que chaque* f_k *soit continue en un point* $a \in X$. *Alors la somme* $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ *est continue en* a. *En particulier, si chaque* f_k *est continue sur* X, *alors* $S(x)$ *est continue sur* X.

Démonstration. — Le théorème découle directement du Théorème 2.1.6. □

***Théorème 2.3.3.* —** *Supposons que la série* $\sum_{k\geqslant 0} f_k(x)$ *converge uniformément sur un intervalle* $[a,b]$ *et que chaque* f_k *soit continue sur* $[a,b]$. *Alors la série numérique*

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(\int_a^b f_k(x)dx\right)$$

converge vers

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right) dx.$$

Démonstration. — Le théorème découle directement du Théorème 2.2.1. □

***Théorème 2.3.4.* —** *Soit* $I \subset \mathbf{R}$ *un intervalle et soit* $f_k : I \to \mathbf{R}$ *une suite de fonctions dérivables sur* I *vérifiant les conditions suivantes :*

a) Il existe $c \in I$ *tel que la série numérique* $\sum_{k\geqslant 0} f_k(c)$ *converge.*

b) La série $\sum_{k\geqslant 0} f_k'(x)$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé et borné* $[a,b] \subset I$ *vers une fonction* $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x)$.

Alors

i) La série $\sum_{k\geqslant 0} f_k(x)$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé et borné* $[a,b] \subset I$ *vers une fonction*

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

ii) La fonction $S(x)$ *est dérivable et* $S'(x) = g(x)$. *Autrement dit*

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x).$$

Démonstration. — Le théorème découle directement du Théorème 2.2.3. □

***Exemple 2.3.5.* —** Considérons la série de fonctions

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k+x}.$$

sur l'intervalle $I =]-1,+\infty[$. Par la règle de Leibnitz (Théorème 1.3.5), la série converge pour tout $x \in I$ et on a :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Donc la suite $R_n(x)$ converge uniformément vers 0 sur I, d'où on déduit que la série converge uniformément sur I. En particulier, elle converge uniformément sur tout intervalle fermé et borné $[a,b] \subset I$. On pose

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}, \qquad x \in I.$$

Nous voulons appliquer le Théorème 2.3.4. Vérifions que la série remplie les conditions requises. On a

$$f_k'(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+x)^2}.$$

La règle de Leibnitz montre que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} f_k'(x)$ converge simplement sur I. Si l'on note $\tilde{R}_n(x)$ le reste de rang n de cette série, alors

$$|\widetilde{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1+x)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit que $\widetilde{R}_n(x)$ converge uniformément vers 0. Donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} f_k'(x)$ converge uniformément. Par le Théorème 2.3.2, la fonction $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+x)^2}$ est continue sur I. Par le Théorème 2.3.4, la fonction $S(x)$ est dérivable sur I et

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+x)^2}.$$

Pour résumer, on a prouvé que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k+x}$ converge uniformément vers une fonction continument dérivable et que

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}\right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+x)^2}.$$

2.4. Convergence normale

***Définition.* —** *Soit $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k(x)$ une série de fonctions. On dit que $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k(x)$ converge normalement sur X si et seulement si*

a) $\sup_{x\in X} |f_k(x)| < +\infty$ *pour tout $k \in \mathbf{N}$;*

b) La série numérique

$$\sum_{k\geqslant 0} \left(\sup_{x\in X} |f_k(x)|\right)$$

converge.

***Théorème 2.4.1.* —** *La convergence normale d'une série de fonctions entraîne sa convergence uniforme.*

Démonstration. — Supposons que $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k(x)$ converge normalement. Soit $\varepsilon > 0$. Par le critère de Cauchy pour les suites numériques, il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $m > n \geqslant N_\varepsilon$ on a :

$$\sum_{k=n+1}^{m} \sup_{x\in X} |f_k(x)| < \varepsilon.$$

Alors pour tous $m > n \geqslant N_\varepsilon$ on a

$$\forall x \in X, \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \sup_{x\in X} |f_k(x)| < \varepsilon.$$

Donc la série converge normalement. □

Exemple 2.4.2. — On reprend la série de fonctions

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k+x}$$

de l'Exemple 2.3.5. On étudie d'abord la convergence normale de cette série sur un intervalle $[a,b] \subset]-1,+\infty[$. On a

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{(-1)^k}{k+x} \right| = \frac{1}{k+a}.$$

Or la série

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k+a}$$

diverge quel que soit a. Donc la série ne converge normalement sur aucun $[a,b]$. Cependant elle converge uniformément.

Exemple 2.4.3. — La série

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{1+x^n}$$

converge normalement sur tout intervalle I de la forme $I = [a,+\infty[$, où $a > 1$. En effet,

$$\sup_{x\in I} \left| \frac{1}{1+x^n} \right| \leqslant \sup_{x\in I} \left| \frac{1}{x^n} \right| = \frac{1}{a^n}.$$

Comme la série géométrique $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{a^n}$ converge si $a > 1$, la série

$$\sum_{k\geqslant 0} \sup_{x\in I} \left| \frac{1}{1+x^n} \right|$$

converge également.

2.5. Interversion somme-limite

Soit $(F_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions $F_n : [a,b[\to \mathbf{R}$ définies sur le même intervalle $[a,b[$.

Théorème 2.5.1. — *Supposons que la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie les conditions suivantes :*
a) $(F_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers une fonction $F : [a,b[\to \mathbf{R}$;
b) Chaque fonction F_n admet une limite L_n en b.
Alors la suite $(L_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $L \in \mathbf{R}$, la fonction $F(x)$ admet une limite en b et

$$\lim_{x\to b} F(x) = \lim_{n\to+\infty} L_n.$$

Autrement dit,

$$\lim_{x\to b} \left(\lim_{n\to+\infty} F_n(x) \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to b} F_n(x) \right).$$

Démonstration. — 1) On montre que la suite $(L_k)_{k\geqslant 0}$ converge. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(F_k)_{k\geqslant 0}$ converge uniformément, il est uniformément de Cauchy. Donc il existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $m,n \geqslant N_\varepsilon$ et tout $x \in [a,b[$

$$|F_m(x) - F_n(x)| < \varepsilon/2.$$

En passant à la limite quand $x \to b$ on obtient

$$|L_m - L_n| = |\lim_{x\to b} F_m(x) - \lim_{x\to b} F_n(x)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Donc $(L_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy. Par conséquence, elle converge vers un nombre réel L.
2) On montre que $\lim_{x\to b} F(x) = L$. On a

$$|F(x) - L| = |F(x) - F_n(x) + F_n(x) - L_n + L_n - L| \leqslant |F(x) - F_n(x)| + |F_n(x) - L_n| + |L_n - L|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors

a) Comme $\lim_{n\to+\infty} L_n = L$, il existe N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$

$$|L_n - L| < \varepsilon/3$$

b) Comme $(F_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers F, il existe N_2 tel que pour tout $n \geqslant N_2$ et pour tout $x \in [a,b[$

$$|F(x) - F_n(x)| < \varepsilon/3.$$

c) On fixe $n \geqslant \{N_1, N_2\}$. Comme $\lim_{x\to b} F_n(x) = L_n$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b[$ tel que $0 < b - x < \delta$ on a

$$|F_n(x) - L_n| < \varepsilon/3.$$

On en déduit que pour tout $x \in [a,b[$ tel que $0 < b - x < \delta$

$$|F(x) - L| = |F(x) - F_n(x) + F_n(x) - L_n + L_n - L| \leqslant$$
$$\leqslant |F(x) - F_n(x)| + |F_n(x) - L_n| + |L_n - L| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Donc $\lim_{x\to b} F(x) = L$ et le théorème est démontré. □

On déduit du Théorème 2.5.1 le corollaire suivant.

Théorème 2.5.2. — *Soit $(f_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de fonctions où les fonctions $f_k : [a,b[\to \mathbf{R}$ sont définies sur le même intervalle $[a,b[$. Supposons qu'elle vérifie les conditions suivantes :*

a) La série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformément sur $[a,b[$ vers une fonction $F(x)$.

b) Chaque fonction f_k admet une limite ℓ_k en b.

Alors

i) La série numérique $\sum_{k=0}^{\infty} \ell_k$ converge.

ii) La fonction $F(x)$ admet une limite en b.

iii) $\lim_{x\to b} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_k$.

Autrement dit

$$\lim_{x\to b}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to b} f_k(x)\right).$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le Théorème 5.1 à la suite $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. □

Exemple 2.5.3. — On reprend la série de l'Exemple 2.3.5 :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}.$$

On a prouvé que cette série converge normalement sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout $k \geqslant 1$ on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = 0.$$

Par le Théorème 2.5.2 on trouve que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0.$$

CHAPITRE 3

SÉRIES ENTIÈRES

3.1. Généralités

Définition. — *Une série entière est une série de fonctions* $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k$ *dont le terme général est de la forme* $f_k = a_k x^k$*, où* a_k *sont des nombres réels ou complexes et la variable* x *est, suivant les cas, réelle ou complexe.*

Une série entière s'écrit :

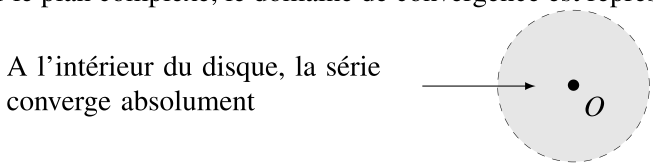
$$\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k.$$

Dans un premier temps, on s'intéresse au domaine de convergence d'une série entière. Étudions d'abord quelques exemples.

Exemple 3.1.1. — La série géométrique :

$$\sum_{k\geqslant 0} x^k, \qquad x \in \mathbf{C}.$$

Pour chaque x, c'est la suite géométrique de raison x. Donc elle converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| \geqslant 1$. Sur le plan complexe, le domaine de convergence est représenté par le disque ouvert de rayon 1 :



Exemple 3.1.2. — La série

(5) $$\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbf{C}.$$

On applique le critère de d'Alembert à la série

(6) $$\sum_{k\geqslant 0} \frac{|x|^k}{k!}.$$

Pour tout $x \in \mathbf{C}$ on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^{k+1}/(k+1)!}{|x|^k/k!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0.$$

Donc la série (6) converge pour tout x et la série (5) converge absolument pour tout $x \in \mathbf{C}$.

Exemple 3.1.3. — La série

(3) $$\sum_{k\geqslant 0} k!\cdot x^k, \qquad x \in \mathbf{C}.$$

On a

$$\frac{(k+1)!\cdot x^{k+1}}{k!\cdot x^k} = (k+1)x.$$

On en déduit que, pour un x fixé, $k!\cdot|x|^k \to +\infty$ quand $k \to \infty$. Donc la série (3) diverge pour tout $x \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$.

Nous démontrons maintenant un résultat général.

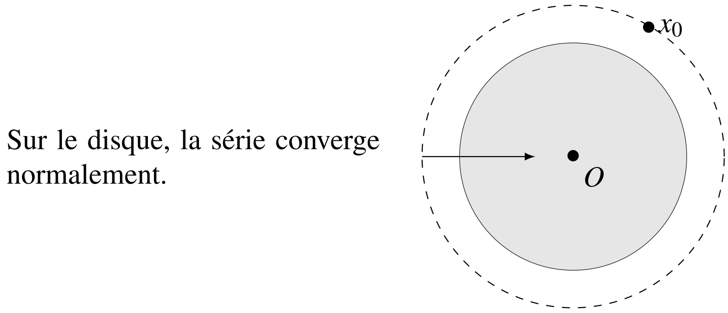
***Lemme 3.1.4* (lemme d'Abel). —** *Soit* $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ *une série entière. Soit* $x_0 \in \mathbf{C}$ *un nombre complexe tel que la suite* $(a_k x_0^k)_{k\geqslant \mathbf{N}}$ *soit bornée. Alors*

i) pour tout $x_1 \in \mathbf{C}$ *tel que* $|x_1| < |x_0|$, *la série numérique* $\sum_{k\geqslant 0} a_k x_1^k$ *converge absolument.*

ii) pour tout nombre réel r tel que $0 \leqslant r < |x_0|$, *la série de fonctions* $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ *converge normalement sur le disque fermé*

$$\overline{D}(0,r) = \{x \in \mathbf{C} \mid |x| \leqslant r\}$$

de rayon r centré en 0.



Démonstration. — i) Si $x_0 = 0$, il n'y a pas de $x \in \mathbf{C}$ tel que $|x| < |x_0|$ donc l'assertion est triviale. Soit $x_0 \neq 0$. Si la suite $(a_n x_0^k)_{k\geqslant \mathbf{N}}$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$|a_k x_0^k| \leqslant M.$$

Si $|x_1| < |x_0|$, alors

$$|a_k x_1^k| = \left| a_k x_0^k \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^k \right| = |a_k x_0^k| \cdot \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^k \leqslant M \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^k, \qquad \left|\frac{x_1}{x_0}\right| < 1.$$

Donc la série $\sum_{k\geqslant 0} |a_k x_1^k|$ est majorée par la série

$$\sum_{k\geqslant 0} M \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^k = M \sum_{k\geqslant 0} q^k, \qquad q = \left|\frac{x_1}{x_0}\right| < 1.$$

Comme la série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} q^k$ converge, la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k x_1^k$ converge absolument.

ii) Soit $0 \leqslant r < |x_0|$. Alors

$$\sup_{x\in\overline{D}(0,r)} |a_k x^k| = \sup_{|x|\leqslant r} \left(|a_k| \cdot |x|^k\right) = |a_k| r^k = |a_k x_0|^k \left|\frac{r}{x_0}\right|^k \leqslant M \left|\frac{r}{x_0}\right|^k.$$

Comme $\left|\frac{r}{x_0}\right| < 1$, la série $\sum_{k\geqslant 0} M \left|\frac{r}{x_0}\right|^k$ converge. Donc la série $\sum_{k\geqslant 0} \sup_{|x|\leqslant r} |a_k x^k|$ converge, ce qui signifie que la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ converge normalement sur le disque $\overline{D}(0,r)$. □

***Définition*. —** *Soit* $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ *une série entière. On pose*

$$R = \sup\{r \geqslant 0 \mid \text{la suite } (|a_k| r^k)_{k\geqslant 0} \text{ est bornée}\}$$

et on appelle R le rayon de convergence de la série.

Le disque ouvert

$$D(0,R) = \{x \in \mathbf{C} \mid |x| < R\}$$

est appelé disque de convergence de la série.

Théorème 3.1.5. **—** *Soit R le rayon de convergence d'une série entière* $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$.

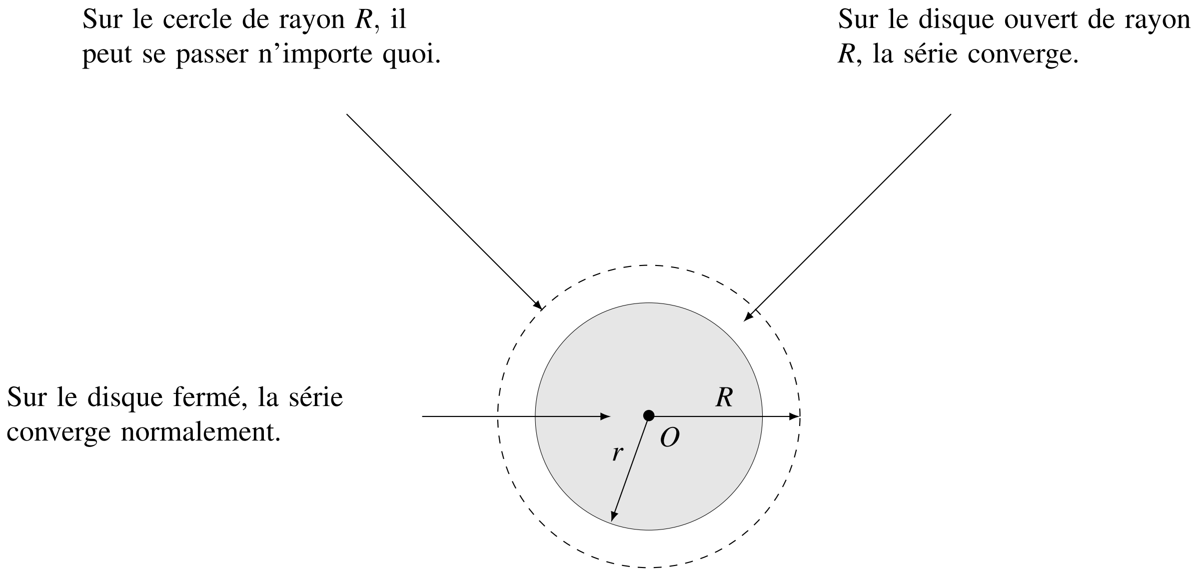
i) Si $R=0$, la série ne converge que pour $x=0$.

ii) Si $R=+\infty$, la série converge absolument pour tout $x\in\mathbf{C}$. Elle converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(0,r)$, $r>0$.

iii) Si R est un nombre réel positif,

a) la série converge absolument pour tout $x\in D(0,R)$ et normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(0,r)$, où $0<r<R$.

b) la série diverge pour tout $x\in\mathbf{C}$ tel que $|x|>R$.



Démonstration. — i) Supposons que $R=0$. Alors pour tout $r>0$ la suite $(a_k r^k)_{k\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée. Soit $x\neq 0$. En posant $r=|x|$ on trouve que la suite $(|a_k x^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée. En particulier, $a_k x^k$ ne tend pas vers 0 quand $k\to+\infty$. On en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ diverge.

ii) Supposons que $R=+\infty$. Soit $x\in\mathbf{C}$. On fixe $x_0\in\mathbf{C}$ tel que $|x_0|>|x|$. Comme $R=+\infty$, la suite $(|a_k x_0^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée. En appliquant le lemme d'Abel on trouve que $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ converge.

Soit $r>0$. On fixe $x_0\in\mathbf{C}$ tel que $|x_0|>r$. Comme $R=+\infty$, la suite $(|a_k x_0^k|)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée. Par le point ii) du lemme d'Abel, la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$.

□

Nous démontrons maintenant une version du critère de d'Alembert qui nous permettra, dans certains cas, de déterminer le rayon de convergence.

Proposition 3.1.6. **—** *Soit* $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ *une série entière. Supposons que la suite $|a_{k+1}|/|a_k|$ admet une limite (finie ou infinie) et posons*

$$l=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}.$$

Alors

i) $R=0$ si $l=+\infty$.

ii) $R=+\infty$ si $l=0$.

iii) $R=1/l$ si $0<l<+\infty$.

Démonstration. — i) Supposons que $l=+\infty$. Alors pour tout $x\neq 0$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|}=|x|\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=+\infty.$$

Par la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ diverge. Donc $R\leqslant|x|$. Comme x est un nombre complexe non-nul quelconque, on en déduit que $R=0$.

ii) Supposons que $l = 0$. Alors le même calcul montre que pour tout $x \in \mathbf{C}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|} = |x| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 0.$$

Par la règle de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ converge. Donc $R \geqslant |x|$. Comme x est un nombre complexe quelconque, on en déduit que $R = +\infty$.

iii) Supposons que $0 < l < +\infty$. Alors le même calcul montre que pour tout $x \in \mathbf{C}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|} = |x| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = |x| \cdot l < 1$$

si $|x| < 1/l$. Donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ converge absolument si $|x| < 1/l$, ce qui montre que $R \geqslant 1/l$.

Si $|x| > 1/l$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ ne converge pas absolument. En comparant avec le Théorème 1.2 iiia), on trouve que $R \leqslant 1/l$. Donc $R = 1/l$. □

***Exemple 3.1.7.* —** On considère la série :

$$\sum_{k\geqslant 1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

On a $a_k = (-1)^{k+1}/k$, d'où

$$l = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{k}{k+1} = 1.$$

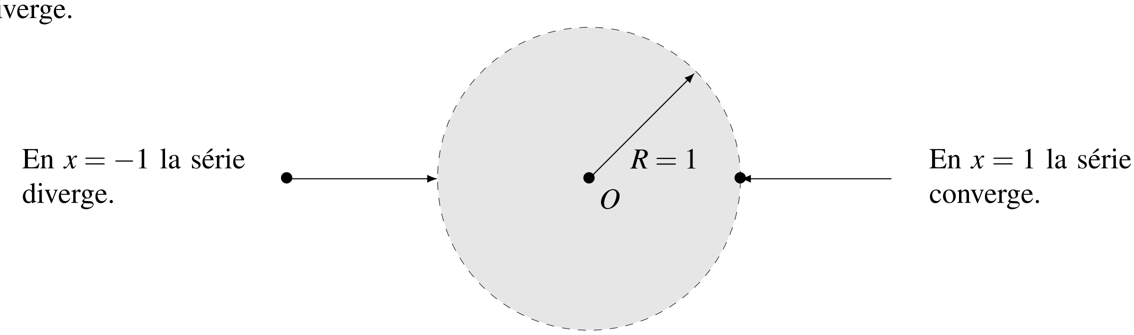
Donc $R = 1/l = 1$. et la série converge absolument à l'intérieur du circle de rayon 1 et diverge à l'extérieur. On voit aussi que si $|x| = 1$, les deux cas sont possibles. Pour $x = 1$, la série

$$\sum_{k\geqslant 1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

est une série alternée qui converge puisque $1/k \to 0$ quand $k \to \infty$. Pour $x = -1$, la série

$$\sum_{k\geqslant 1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = -\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$$

diverge.



Le théorème suivant donne le rayon de convergence d'une série entière quelconque.

***Théorème 3.1.8* (Théorème d'Hadamard). —** *Soit $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k x^k$ une série entière et soit R son rayon de convergence. Alors*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Démonstration. — On applique la règle de Cauchy. Soit $l = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Alors pour tout $x \in \mathbf{C}$ tel que $|x| < 1/l$, on a

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| l < 1.$$

et par la règle de Cauchy, la série converge absolument. Donc $R \geqslant 1/l$.

Pour tout $x \in \mathbf{C}$ tel que $|x| > 1/l$, on a

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| l > 1,$$

ce qui montre que la suite $|a_k x^k|$ n'est pas bornée. En particulier, $a_k x^k$ ne tend pas vers 0 quand k_to+_infty ce qui montre que la série diverge. On en déduit que $R \leqslant 1/l$.

Donc $R = 1/l$, et le théorème est démontré. □

***Définition.* —** *Soient* $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ *et* $\sum_{k\geqslant 0} b_k x^k$ *deux séries entières.*

i) On appelle somme de ces deux séries la série entière

$$\sum_{k\geqslant 0} (a_k + b_k) x^k.$$

ii) On appelle produit de ces deux séries la série entière

$$\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k,$$

où les coefficients c_k *sont donnés par la formule suivante :*

$$c_k = \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}, \qquad k \geqslant 0.$$

Nous admettons le théorème suivant.

***Théorème 3.1.9.* —** *Soient* $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ *et* $\sum_{k\geqslant 0} b_k x^k$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_1 *et* R_2. *Alors*

i) La série entière somme

$$\sum_{k\geqslant 0} (a_k + b_k) x^k$$

converge sur le disque ouvert de rayon $R = \min\{R_1, R_2\}$. *Autrement dit, le rayon de convergence de cette série est* $\geqslant R$. *Pour tout* $x_1 \in D(0,R)$, *on a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x_1^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x_1^k.$$

ii) La série entière produit

$$\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$$

converge sur le disque ouvert de rayon $R = \min\{R_1, R_2\}$. *Autrement dit, le rayon de convergence de cette série est* $\geqslant R$. *Pour tout* $x_1 \in D(0,R)$, *on a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x_1^k \right).$$

3.2. Propriété de la somme d'une série entière

Soit $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la somme de cette série qui est une fonction complexe bien définie sur $D(0,R) = \{x \in \mathbf{C} \mid |x| < R\}$. Nous supposons maintenant que $a_k \in \mathbf{R}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et considérons $f(x)$ comme une fonction de variable réelle x, qui est bien définie sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

***Théorème 3.2.1.* —** *La fonction* $f(x)$ *est continue sur* $]-R,R[$. *Elle est uniformément continue sur tout segment fermé* $[r,r]$, *où* $0 < r < R$.

Démonstration. — Soit r un nombre réel tel que $0 < r < R$. Par le Theorème 1.2, la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ converge normalement donc uniformément sur $[-r,r]$. On sait que la somme d'une série qui converge uniformément est continue. Donc $f(x)$ est continue sur $[-r,r]$. Comme tout $x \in]-R,R[$ est contenu dans le segment $[r,r]$ pour un r suffisamment grand (on prend $|x| < r < R$), on en déduit que $f(x)$ est continue sur $]-R,R[$.

□

***Théorème 3.2.2.* —** *i) Pour tous $a,b \in \mathbf{R}$ tels que $[a,b] \subset]-R,R[$, on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Autrement dit,

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+1} \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_k t^k dt \right).$$

ii) En particulier,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Démonstration. — i) On sait que si une série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} f_k(x)$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(t) \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b f(t)dt \right) \tag{7}$$

(cf. Théorème 2.2.1). En appliquant cette propriété à la série entière $\sum_{k \geqslant 0} a_k x^k$ avec $f_k(x) = a_k x^k$, on obtient le théorème.

ii) En posant $a = 0$ et $b = x$ dans la formule (7), on obtient la formule voulue. □

***Exemple 3.2.3.* —** On a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad |x| < 1.$$

En remplaçant x par $-x$, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \qquad |x| < 1.$$

Comme

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k},$$

le théorème précédent donne la formule :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \qquad |x| < 1.$$

***Théorème 3.2.4.* —** *i) La fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$.*

ii) Les séries $\sum_{k \geqslant 0} a_k x^k$ et $\sum_{k \geqslant 1} k a_k x^{k-1}$ ont la même rayon de convergence et

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Autrement dit,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Démonstration. — 1) On montre que les séries $\sum_{k \geqslant 0} a_k x^k$ et $\sum_{k \geqslant 1} k a_k x^{k-1}$ ont la même rayon de convergence. Soient R et R' les rayons de convergence des séries $\sum_{k \geqslant 0} a_k x^k$ et $\sum_{k \geqslant 1} k a_k x^{k-1}$ respectivement.

1a) On montre que $R' \leqslant R$. Supposons que $r < R'$. Alors la suite $(k a_k r^{k-1})_{k \in \mathbf{N}}$ est bornée (et même tend vers 0). On a

$$a_k r^k = (k a_k r^{k-1}) \cdot \frac{r}{k}.$$

Comme $r/k \to 0$ quand $k \to \infty$, on en déduit que la suite $(a_k r^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est également bornée. Donc $r \leqslant R$. On a montré que si $r < R'$, alors $r \leqslant R$, ce qui implique que $R' \leqslant R$.

1b) On montre que $R \leqslant R'$. Supposons que $r < R$ et choisissons un nombre réel s tel que $r < s < R$. Alors la suite $(a_k s^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée. On a

$$ka_k r^{k-1} = (a_k s^k) \cdot \left(\frac{kr^{k-1}}{s^k}\right).$$

Comme $r/s < 1$, par le théorème des croissances comparées on a

$$\frac{kr^{k-1}}{s^k} = \frac{1}{s} \cdot k \left(\frac{r}{s}\right)^{k-1} \to 0$$

quand $k \to \infty$. Donc la suite $(ka_k r^{k-1})_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée, d'où $r \leqslant R'$.

On a montré que si $r < R$, alors $r \leqslant R'$, ce qui implique que $R \leqslant R'$.

Donc $R = R'$.

2) Soit $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k(x)$ une série de fonctions qui converge sur un intervalle I. Supposons que $f_k(x)$ sont dérivables sur I pour tout $k \in \mathbf{N}$. On sait que si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k'(x)$ converge uniformément sur I, alors

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

(cf. Théorème 2.3.4). Soient $f_k(x) = a_k x^k$. Alors $f_k'(x) = a_k x^{k-1}$ ($k \geqslant 1$). Fixons un nombre réel r tel que $0 < r < R$ et posons $I =]-r, r[$. Par la première partie de la preuve, le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k\geqslant 1} f_k'(x) = \sum_{k\geqslant 1} ka_k x^{k-1}$$

est R. Par le Théorème 1.2, cette série converge normalement, donc uniformément, sur $[-r, r]$. On en déduit que

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}, \quad \forall x \in]-r, r[. \tag{8}$$

Comme tout $x \in]-R, R[$ est contenu dans un intervalle de la forme $]-r, r[$ avec $r < R$, la formule (8) est vraie pour tout $x \in]-R, R[$. Le théorème est démontré. □

Exemple 3.2.5. — On sait que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad x \in]-1, 1[.$$

On a :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En appliquant le théorème précédent, on trouve que

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in]-1, 1[.$$

3.3. Développement en série entière

Soit $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervalle contenant 0 et soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment dérivable sur I.

Définition. — *On dit que f admet un développement en série entière si et seulement si il existe une suite de coefficients $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad \forall x \in I.$$

Exemple 3.3.1. — La fonction $\dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

D'abord, nous allons montré que si f admet un développement en série entière, alors il est unique.

***Proposition 3.3.2.* —** *Supposons que f admet un développement en série entière*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Alors

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad \forall k \geqslant 0.$$

Démonstration. — Soit R le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Comme la série converge sur I, on a $I \subseteq]-R,R[$. En itérant la formule du Théorème 3.2.4, on obtient :

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\\
&f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},\\
&f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1) a_k x^{k-m},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

En posant $x = 0$ dans ces équations, on trouve :

$$\begin{aligned}
&f(0) = a_0,\\
&f'(0) = a_1,\\
&f''(0) = 2a_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f^{(m)}(0) = m! a_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Donc

$$a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}, \qquad \forall m \geqslant 0.$$

□

***Théorème 3.3.3.* —** *Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I contenant* 0. *Supposons qu'il existe une constante M telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in I$,*

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant M.$$

Alors f admet un développement en série entière sur I. Plus précisément,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Démonstration. — On applique la formule de Taylor-Lagrange à f à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} x^{n+1},$$

où $\xi_{n+1} \in I$. Soit

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Alors

$$|f(x)-S_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqslant M\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Comme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

(cf. Exemple 3.1.2), on en déduit que la suite des sommes partielles $S_n(x)$ converge vers $f(x)$. Le théorème est démontré. □

On peut généraliser ce théorème en considérant une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert quelconque I. Soit $a \in I$. En posant le changement de variables $x \mapsto x-a$, on déduit du théorème précédent le résultat suivant.

Théorème 3.3.4. — *Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. Supposons qu'il existe une constante M telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $x \in I$,*

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant M.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \qquad \forall x \in I.$$

Définition. — *Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle I contenant a. On appelle*

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

la série de Taylor de f en a.

Le Théorème 3.3.4 donne une condition suffisante pour que la série de Taylor en a converge vers la fonction f sur I.

Exemple 3.3.5. — La fonction exponentielle. Soit $f(x) = e^x$. On a $f^{(k)}(x) = e^x$ pour tout $k \geqslant 0$, d'où $f^{(k)}(0) = 1$. La série de Taylor de e^x en 0 s'écrit

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots. \tag{9}$$

On va montrer que cette série converge vers f sur $\mathbf{R}$. Soit $x_1 \in \mathbf{R}$. Alors il existe $r > 0$ tel que $x_1 \in]-r,r[$. Pour tout $x \in]-r,r[$ on a

$$|f^{(k)}(x)| = |e^x| \leqslant e^r.$$

On peut donc appliquer le Théorème 3.3 en posant $I =]-r,r[$ et $M = e^r$. On en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{x_1^k}{k!}$ converge vers $f(x_1)$. Comme x_1 est un nombre réel quelconque, la série (9) converge vers $f(x)$ sur $\mathbf{R}$. Autrement dit,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Par le Théorème 3.1.5, la convergence est normale sur tout segment borné $[-r,r]$.

Exemple 3.3.6. — Soit $f(x) = \ln(x+1)$. Le développement de cette fonction en 0 a été trouvé dans l'Exemple 3.2.3 :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}, \qquad |x| < 1.$$

Exemple 3.3.7. — Soit $f(x) = \cos(x)$. On a

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{si } k \text{ est de la forme } k = 4m,\ m \in \mathbf{N},\\ -\sin(x), & \text{si } k \text{ est de la forme } k = 4m+1,\ m \in \mathbf{N},\\ -\cos(x), & \text{si } k \text{ est de la forme } k = 4m+2,\ m \in \mathbf{N},\\ \sin(x), & \text{si } k \text{ est de la forme } k = 4m+3,\ m \in \mathbf{N}.\end{cases}$$

En posant $x=0$, on trouve que $f^{(k)}(0)=1$ si $k=4m$, $f^{(k)}(0)=-1$ si $k=4m+2$, et $f^{(k)}(0)=0$ si k est impair. La série de Taylor en 0 s'écrit

$$\sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots. \tag{10}$$

On montre que cette série converge vers $\cos(x)$ sur $\mathbf{R}$. Soit $x_1\in\mathbf{R}$. Alors il existe $r>0$ tel que $x_1\in]-r,r[$. Pour tout $x\in\mathbf{R}$ on a

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant 1.$$

On peut donc appliquer le Théorème 3.3.4 en posant $I=]-r,r[$ et $M=1$. On en déduit que la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x_1^k}{k!}$ converge vers $f(x_1)$. Comme x_1 est un nombre réel quelconque, la série (10) converge vers $f(x)$ sur $\mathbf{R}$. Autrement dit,

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!},\qquad \forall x\in\mathbf{R}.$$

Par le Théorème 3.1.5, la convergence est normale sur tout segment borné $[-r,r]$.

Exemple 3.3.8. — Les mêmes arguments montrent que

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots,\qquad \forall x\in\mathbf{R}.$$

3.4. Application aux équations différentielles

Soit $\alpha\in\mathbf{R}$ un nombre réel fixé. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$(1+x)f'(x)=\alpha f(x). \tag{11}$$

On voit directement que la fonction $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ est une solution de cette équation et vérifie la condition initiale :

$$f(0)=1. \tag{12}$$

Supposons maintenant que

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

est une série entière vérifiant la même équation différentielle. Alors par le Théorème 3.2.4, on a :

$$g'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1},$$

et

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x)=g'(x)+xg'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^k=a_1+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k+\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^k=\\ =a_1+\sum_{k=1}^{\infty}((k+1)a_{k+1}+ka_k)x^k\end{aligned}$$

(dans ce calcul, on utilise la formule $\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}=a_1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}=a_1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k$). Alors l'équation différentielle (11) s'écrit :

$$a_1+\sum_{k=1}^{\infty}((k+1)a_{k+1}+ka_k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha a_kx^k.$$

En identifiant les termes de même degré, on obtient :

$$(k+1)a_{k+1}+ka_k=\alpha a_k$$

ou encore

$$a_{k+1}=\frac{\alpha-k}{k+1}a_k,\qquad k\geqslant 1. \tag{13}$$

Supposons que la fonction $g(x)$ vérifie la même condition initiale (12) que la fonction f. Alors $a_0 = g(0) = 1$. On a un système de relations :

$$a_0 = 1,$$
$$a_{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1} a_k, \qquad k \geqslant 1.$$

Par récurrence, il est facile de vérifier que l'unique solution de ce système est :

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \qquad k \geqslant 0,$$

et on trouve que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots.$$

On détermine maintenant le rayon de convergence de $g(x)$. En utilisant la relation (13), on trouve que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\alpha - k}{k+1} \right| = 1.$$

Par la règle de d'Alembert, $g(x)$ converge sur l'intervalle $]-1,1[$.

Donc les fonctions $f(x) = (1+x)^\alpha$ et $g(x)$ sont deux solutions de l'équation différentielle (11) avec la même condition initiale (12). Par l'unicité de la solution du problème de Cauchy, on trouve que $f(x) = g(x)$, d'où la formule :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots, \qquad x \in]-1,1[.$$

Donc on a trouvé le développement de la fonction $(1+x)^\alpha$ en série de Taylor en 0. Si $\alpha = n$ est un nombre naturel, il coïncide avec la formule du binôme :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k.$$

***Remarque 3.4.1.* —** *On peut utiliser les méthodes esquissées dans cette section pour chercher les solutions des équations différentielles sous forme de série entière. Voir la feuille TD no. 4.*

Pour résumer, dans ce cours on a établit les développements suivants :

1) $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1,$$

2) $$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}, \quad |x| < 1,$$

3) $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k, \quad x \in]-1,1[,$$

4) $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

5) $$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \qquad x \in]-1,1[,$$

6) $$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

7) $$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$