
Feuille d'exercices n° 1

Polynômes symétriques

Exercice 1. Vérifiez que les polynômes suivants sont symétriques et exprimez les en termes de polynômes symétriques élémentaires

1. $(X + Y)(X + Z)(Y + Z)$ dans $\mathbb{R}[X, Y, Z]$.
2. $X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2$ dans $\mathbb{R}[X, Y, Z]$.
3. $X^3 + Y^3 + Z^3$ dans $\mathbb{R}[X, Y, Z]$.
4. $\sum_{1 \leq i \leq n} X_i^3$ dans $\mathbb{R}[X_1, X_2, \dots, X_n]$, $n \geq 3$.

Exercice 2. Montrer les formules suivantes dans $\mathbb{R}[X_1, X_2, \dots, X_n]$, $n \geq 4$:

1. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i^2 X_j^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4$.
2. $\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} X_i^3 X_j = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3 + 4\sigma_4$.

Exercice 3. 1. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les racines complexes du polynôme $X^4 - X^3 + X^2 + 2X - 4$. Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$.

2. Soient x_1, x_2, x_3 les racines du polynôme $X^3 + X + 3$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer le polynôme unitaire de degré 3 admettant comme racines x_1^2, x_2^2, x_3^2 .

Exercice 4. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ les racines d'un polynôme $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. Montrer que tout polynôme symétrique en $x_1, x_2, \dots, x_n$ s'écrit comme un polynôme en x_1 dont les coefficients s'expriment explicitement en fonction des coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$.

Généralités sur les modules

Dans tous les exercices, A désigne un anneau commutatif et unitaire.

Exercice 5. Montrer qu'un groupe abélien admet une structure de $\mathbb{Z}$ -module et une seule.

Exercice 6. 1. Vérifier que la multiplication $A \times A \rightarrow A$, $(a, m) \mapsto am$ définit une structure de A -module sur A .

2. Montrer que les sous-modules de ce module sont les idéaux de A .
3. Montrer qu'un idéal I de A est un sous-module libre si et seulement si I est principal et engendré par un élément qui n'est pas diviseur de zéro de A .
4. Soit M un A -module. Montrer que pour tout $m \in M$ il existe un morphisme de A -modules $f : A \rightarrow M$ tel que $f(1) = m$, et un seul.
5. Soit M un A -module engendré par un élément $m \in M$. Montrer que M est isomorphe au quotient $A/\text{ann}(m)$, où $\text{ann}(m) = \{a \in A \mid am = 0\}$ est l'idéal annulateur de m .

Exercice 7. Soient K un corps, E un K -espace vectoriel et φ une application linéaire de E dans E .

1. Montrer que la formule

$$P(X) \cdot v = P(\varphi)(v), \quad v \in E$$

définit une structure de $K[X]$ -module sur E que l'on notera E_φ .

2. Montrer qu'une partie E' de E est un sous-module de E_φ si et seulement si E' est un sous-espace de E tel que $\varphi(E') \subset E'$.
3. Soit $\psi : E \rightarrow E$ une autre application linéaire. À quelle condition les modules E_φ et E_ψ sont-ils isomorphes ?
4. Supposons que $\dim_K(E) = 2$ et fixons une base $\{e_1, e_2\}$ de E . Soit $\varphi : E \rightarrow E$ l'application linéaire définie par $\varphi(e_1) = 0$, $\varphi(e_2) = e_1$. Montrer que les $K[X]$ -modules E_φ et $K[X]/(X^2)$ sont isomorphes.
5. Dans le cas général, montrer que E_φ est un module de torsion et décrire son idéal annulateur.

Exercice 8. Soient M et N deux A -modules, et soit $\text{Hom}_A(M, N)$ l'ensemble des morphismes de A -modules de M dans N .

1. Définir une structure naturelle de A -module sur $\text{Hom}_A(M, N)$.
2. Prouver que les A -modules M et $\text{Hom}_A(A, M)$ sont isomorphes (cf. Exercice 6.4).

Exercice 9. Dans cet exercice $A = \mathbb{Z}$.

1. Donner un exemple d'un A -module non nul qui n'est pas libre.
2. Donner un exemple d'une famille libre à n éléments dans A^n qui n'est pas une base.
3. Soit $\{e_i\}_{i=1}^n$ une base de A^n . Soit $\{f_i\}_{i=1}^n$ une famille à n éléments dans A^n . On note P la matrice de passage de $\{e_i\}_{i=1}^n$ à $\{f_i\}_{i=1}^n$. Montrer que $\{f_i\}_{i=1}^n$ est une base de A^n si et seulement si $\det(P) = \pm 1$.
4. Montrer que les éléments $x_1 = (2; 0)$, $x_2 = (3; 0)$, $x_3 = (0; 5)$ et $x_4 = (0; 4)$ forment une famille génératrice minimale (pour la relation d'inclusion) due $\mathbb{Z}^2$. Est-ce une base ?

Exercice 10. Soit M un A -module de type fini et soit $f : M \rightarrow A^n$ un morphisme surjectif de A -modules. On fixe une base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de A^n et l'on note $\{x_i\}_{i=1}^n$ une famille dans M telle que $f(x_i) = e_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit N le sous module de M engendré par $\{x_i\}_{i=1}^n$.

1. Montrer que M est la somme directe de N et de $\ker(f)$.
2. Montrer que $\ker(f)$ est de type fini.