
Feuille d'exercices n° 2

Modules (suite)

Exercice 1. Soit M un A -module et soit I un idéal de A . On note IM l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ ($n \in \mathbb{N}$ arbitraire, $a_i \in I, x_i \in M$ pour tout $i = 1, \dots, n$).

1. Montrer que IM est un sous-module de M . Déterminer IA .
2. Soit $N = M/IM$ le sous-module quotient. Prouver que $IN = \{0\}$.
3. Montrer que tout morphisme de A -modules $f: M \rightarrow P$ induit un morphisme de A -modules $\bar{f}: M/IM \rightarrow P/IP$.
4. Prouver que si f est surjectif, alors $\bar{f}$ l'est aussi.

Exercice 2. Soit M un A -module. On note $T(M)$ l'ensemble des $x \in M$ tels qu'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ vérifiant $ax = 0$. Pour tout $a \in A$, on pose également $M(a) = \{x \in M \mid ax = 0\}$.

1. Vérifier que $M(a)$ est un sous-module de M . Prouver que si deux modules M et N sont isomorphes, alors $M(a)$ et $N(a)$ sont isomorphes. En déduire que les $\mathbb{Z}$ -modules $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.
2. Soit A un anneau intègre. Rappeler pourquoi $T(M)$ est un sous-module de M . Déterminer $T(M)$ pour un module libre M .
3. Soient $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et $M = A$. L'ensemble $T(M)$, est-il un sous-module de M ? Et pour $A = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?
4. Soit A un anneau intègre. Montrer que si $M \simeq N$, alors $T(M) \simeq T(N)$.
5. Soient $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A -modules. Montrez que $(\oplus_{i \in I} M_i)(a) = \oplus_{i \in I} M_i(a)$ et, en supposant A intègre, que $T(\oplus_{i \in I} M_i) = \oplus_{i \in I} T(M_i)$.
6. Soit $A = \mathbb{Z}$. Comparer $T(\prod_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ avec $\prod_{n=2}^{\infty} T(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercice 3. Soit M un A -module. On pose $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$.

1. Dans cette question A est intègre. Montrer que, si M est un module de torsion (c'est-à-dire si pour tout $m \in M$ il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $am = 0$), alors $M^* = \{0\}$. Décrire le dual du $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. Construire un morphisme naturel de A -modules $\phi: M \rightarrow (M^*)^*$.
3. Soit M un A -module libre de type fini et soit $e_1, \dots, e_n$ une base de M . On définit $e_1^*, \dots, e_n^* \in M^*$ en posant $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. Montrer que $e_1^*, \dots, e_n^*$ est une base de M^* . En déduire que M et M^* sont isomorphes et que l'application ϕ est un isomorphisme.
4. Soit Λ un ensemble quelconque. On considère les A -modules A^Λ et $A^{(\Lambda)}$. Montrer que A^Λ est isomorphe à $(A^{(\Lambda)})^*$.

Exercice 4. Soient M et N deux A -modules libres de type fini. Montrer que $\text{Hom}_A(M, N)$ est libre de type fini et en donner une base.

Exercice 5. Montrer que le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Q}$ n'est pas de type fini.

Exercice 6. 1. Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[X, Y]/(1 - XY)$ possède une structure naturelle de $\mathbb{R}[X]$ -module.

2. Montrer que ce module est isomorphe à $\mathbb{R}[X, 1/X] \subset \mathbb{R}(X)$.

3. Est-il de type fini ? libre ?

Exercice 7. Donner un exemple d'un anneau non noethérien.

Exercice 8. Parmi les modules suivants, lesquels sont noethériens ?

1. Un module de type fini sur un anneau A .

2. Le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}[X]$.

3. Le $k[X]$ -module $k[X]/(P)$ où $P \in k[X]$ (k corps commutatif).

Exercice 9. Soient N_1 et N_2 deux sous-modules d'un A -module M .

1. Montrer que les modules $(N_1 + N_2)/N_1$ et $N_2/(N_1 \cap N_2)$ sont isomorphes.

2. Montrer que si M/N_1 et M/N_2 sont noethériens, alors $M/(N_1 \cap N_2)$ l'est aussi.

Exercice 10. 1. Soient M un A -module noethérien et soit $u : M \rightarrow M$ un endomorphisme surjectif. Prouver que u est un isomorphisme. (Indication : considérer la suite $\ker(u^n)$).

2. Donner un exemple d'endomorphisme surjectif mais pas injectif. (Indication : on pourra considérer le A -module libre $A^{(\mathbb{N})}$).

Exercice 11. On dit qu'un A -module M est simple si et seulement si $M \neq \{0\}$ et les seuls sous-modules de M sont M et $\{0\}$. Montrer que M est simple si et seulement si $M \simeq A/\mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A .