

---

## Feuille d'exercices n° 3

---

### Produit tensoriel. Localisation

**Exercice 1.** Soient  $M, N$  and  $L$  des modules sur un anneau commutatif  $A$ . Construire des isomorphismes canoniques :

1.  $\text{Hom}_A(M \otimes_A N, L) \simeq \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, L))$ .
2.  $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$ .
3.  $(M \oplus N) \otimes_A L \simeq (M \otimes_A L) \oplus (N \otimes_A L)$ .

**Exercice 2.** 1. Prouver que  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  où  $d = \text{PGCD}(m, n)$ .

2. Calculer  $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , où  $M$  est un groupe abélien de torsion.

**Exercice 3.** Soient  $K$  un corps,  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $V^\vee = \text{Hom}_K(V, K)$  son dual.

1. Prouver que l'application  $V \otimes_K V^\vee \rightarrow \text{End}_K(V)$  qui à  $v \otimes \alpha$  (avec  $v \in V$  et  $\alpha \in V^\vee$ ) associe l'endomorphisme (de rang 1) donné par  $x \mapsto \alpha(x)v$ , est un isomorphisme.
2. Montrer que l'application  $V \otimes_K V^\vee \rightarrow K$  donnée par  $v \otimes \alpha \mapsto \alpha(v)$  correspond, via cet isomorphisme, à la trace  $\text{Tr} : \text{End}_K(V) \rightarrow K$ .

**Exercice 4.** Soit  $S$  une partie multiplicative d'un anneau  $A$ . Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini. Montrer que  $S^{-1}M = 0$  si et seulement s'il existe  $s \in S$  tel que  $sM = 0$ .

**Exercice 5.** Soit  $M$  un  $A$ -module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i)  $M = 0$ .
- ii)  $M_{\mathfrak{p}} = 0$  pour tous les idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  de  $A$ .
- iii)  $M_{\mathfrak{m}} = 0$  pour tous les idéaux maximaux  $\mathfrak{m}$  de  $A$ .

**Exercice 6.** Soit  $S$  une partie multiplicative de  $A$ . On note  $\iota : A \rightarrow S^{-1}A$  l'application  $a \mapsto \frac{a}{1}$ . Pour tout idéal  $I$  de  $A$  on note  $S^{-1}I$  l'idéal de  $S^{-1}A$  engendré par  $I$ .

1. Montrer que  $S^{-1}I = \{\frac{x}{s} \mid x \in I, s \in S\}$ .
2. On note  $X$  l'ensemble des idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  de  $A$  tels que  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$  et  $Y$  l'ensemble des idéaux premiers de  $S^{-1}A$ . Montrer que l'application  $\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$  établit une bijection entre  $X$  et  $Y$  et que l'application réciproque est donnée par  $\mathfrak{q} \mapsto \iota^{-1}(\mathfrak{q})$ .