Feuille d'exercices n° 4

Anneaux factoriels

Exercice 1. Montrez que dans un anneau factoriel un élément est premier si et seulement s'il est irréductible.

Exercice 2. Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$, où $i^2 = -1$. On note K le corps des fractions de A.

1. Montrer que 2 est un élément irréductible de A.
2. Montrez que 2 n'est pas un élément premier et en déduire que A n'est pas factoriel.
3. Soit $P(X) = X^2 - X + 1 \in A[X]$. Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $A[X]$ mais pas dans $K[X]$.

Exercice 3.
1. Soient A un anneau factoriel, $a, b, c \in A \setminus \{0\}$ et un entier $n \geqslant 2$. Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si $ab = c^n$, alors il existe $x, y \in A$ et $u, v \in A^\times$ tels que $a = ux^n$ et $b = vy^n$.
2. Rappeler pourquoi l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ où $i^2 = -1$, est factoriel.
3. Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant $y^3 = x^2 + 1$.

Exercice 4. Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant $y^3 = x^2 + 2$.

Exercice 5.

Soit A l'anneau $\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$.

1. Montrez que tout élément de $\mathbb{R}[X, Y]$ est congru modulo $(X^2 + Y^2 - 1)$ à un unique polynôme de la forme $XP(Y) + Q(Y)$ avec $P, Q \in \mathbb{R}[Y]$.
2. On définit une application $N : A \to \mathbb{R}[Y]$ donnée par $N(\overline{(XP(Y) + Q(Y))}) = (Y^2 - 1)P(Y)^2 + Q(Y)^2$. Prouver qu'elle est multiplicative.
3. Prouvez que A n'est pas factoriel.

Exercice 6. Soit A l'anneau $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$.

1. Prouvez que A est isomorphe à $B = \mathbb{C}[Z, T]/(ZT - 1)$.
2. Montrer que B est isomorphe à la localisation $\mathbb{C}[Z]_{(Z)}$, où $(Z) = \{Z^n \mid n \geqslant 0\}$.
3. Prouvez que l'application composée $\mathbb{C}[S] \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}[S, T] \xrightarrow{\pi} B$, où ι est l'inclusion naturelle et π désigne la projection, est un morphisme injectif d'anneaux.
4. Prouvez que tout idéal I de B est de la forme $(P(Z))$ où $P(Z) \in \mathbb{C}[Z]$.
5. En déduire que A est un anneau principal et donc factoriel.

Exercice 7. On considère l'idéal $I = (X^2 - Y^3)$ de $\mathbb{C}[X, Y]$ et on pose $A = \mathbb{C}[X, Y]/I$.

1. Montrer que tout élément de $\mathbb{C}[X,Y]$ est congru modulo I à un unique polynôme de la forme $XP(Y)+Q(Y)$ avec $P,Q\in\mathbb{C}[Y]$.

2. Construire un morphisme d'anneaux $f:\mathbb{C}[X,Y]\to\mathbb{C}[T]$ tel que $\ker f = I$. En déduire que l'anneau A est intègre.

3. On note x et y les projections de X et Y dans A. Prouver que $y\neq 0$, que $y\notin A^\times$ et que $x\notin(y)$.

4. Établir que y est irréductible et conclure que l'anneau A n'est pas factoriel.

Exercice 8. Soit A un anneau factoriel tel que pour tous $a,b\in A$, l'idéal (a,b) est principal. Montrer que A est principal.

Exercice 9. Soient A un anneau factoriel, K son corps des fractions et $P(X)=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$ un polynôme à coefficients dans A. Supposons qu'il existe un élément irréductible $\pi\in A$ tel que
a) π divise a_i pour tout $0\leqslant i\leqslant n-1$;
b) π ne divise pas a_n ;
c) π^2 ne divise pas a_0.
Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $K[X]$.