UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
M1, Théorie des Nombres
2020-2021

Feuille 2. Éléments entiers. Anneaux des entiers

Exercice 1. Le but de cet exercice est de déterminer l'anneau des entiers d'un corps quadratique. Soit $K = \mathbf{Q}[\sqrt{d}]$, où $d \in \mathbf{Z}$ est sans facteur carré (d n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier).

1) Montrer que $[\mathbf{Q}[\sqrt{d}] : \mathbf{Q}] = 2$ et donner une base simple de $\mathbf{Q}[\sqrt{d}]$ sur $\mathbf{Q}$.

On note $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{K/\mathbf{Q}}$ et $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}$ les applications norme et trace respectivement. Soit $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbf{Q}[\sqrt{d}]$.

2) Expliciter $\mathrm{N}(\alpha)$ et $\mathrm{Tr}(\alpha)$. Donner le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$.
3) Montrer que α est un élément entier sur $\mathbf{Z}$ si et seulement si $2a \in \mathbf{Z}$ et $a^2 - db^2 \in \mathbf{Z}$.
4) Supposons que $d \equiv 2, 3 \pmod 4$. Montrer que α est un élément entier sur $\mathbf{Z}$ si et seulement si $a, b \in \mathbf{Z}$. Indication: montrer que $2a, 2b \in \mathbf{Z}$ puis étudier $4a^2$ et $4b^2 \pmod 4$.
5) Supposons que $\equiv 1 \pmod 4$. Montrer que α est un élément entier sur $\mathbf{Z}$ si et seulement si $2a, 2b \in \mathbf{Z}$ et $a - b \in \mathbf{Z}$.
6) Montrer que l'anneau des entiers O_K de K est un groupe abélien libre de rang 2 qui est engendré par
- 1 et d si $d \equiv 2, 3 \pmod 4$;
- 1 et $\frac{\sqrt{d}+1}{2}$ si $d \equiv 1 \pmod 4$.

Exercice 2. Soient $\alpha \in \mathbf{C}$ un entier algébrique et $P(X)$ son polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$. Montrer que α^{-1}est un entier algébrique si et seulement si $P(0) = \pm 1$ si et seulement si $\alpha^{-1} \in \mathbf{Z}[\alpha]$.

Exercice 3. Soit α un entier algébrique.
1) Montrer que si tous les conjugués de α sont de module strictement inférieur à 1, alors $\alpha = 0$.

Supposons que tous les conjugués de α sont de module inférieur ou égale à 1. On note d le degré du polynôme minimal de α sur $\mathbf{Z}$.

2) Montrer qu'il existe une constante $C(d) > 0$ qui ne dépend que de d telle que pour tout $m \geqslant 1$ l'entier algébrique α^m est une racine d'un polynôme $P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbf{Z}[X]$ avec $|a_i| \leqslant C(d)$, $0 \leqslant i \leqslant d-1$. Indication: utiliser les polynômes symétriques.
3) Montrer que α est une racine de l'unité. Indication: soit $X = \{\alpha^m \mid m \geqslant 1\}$. Montrer d'abord que α est une racine de l'unité si et seulement si X est un ensemble fini.

Exercice 4. 1) Soit A un anneaux intègre fini. Montrer que A est un corps.
2) Soit k un corps et soit A un anneau intègre tel que $k \subset A$. Montrer que la clôture intégrale de k dans A est un corps.

Exercice 5. Soit A un anneau factoriel dans lequel 2 est inversible et soit $a \in A$ un élément divisible par le carré d'aucun élément irréductible de A. Montrer que $A[\sqrt{a}] = A[X]/(X^2 - a)$ est intégralement clos. Indication: soit K le corps des fractions de A. Montrer que $A[\sqrt{a}]$ est la clôture intégrale de A dans $K[\sqrt{a}]$.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 6. Soient m et n deux entiers sans facteurs carrés, premiers entre eux et différent de 0 et de 1. Soient $K = \mathbf{Q}[\sqrt{m}, \sqrt{n}]$ et O_K son anneau des entiers. Supposons que $m \equiv 2 \pmod 4$ et $n \equiv 3 \pmod 4$.

1) Montrer que $\{1, \sqrt{n}, \sqrt{m}, \sqrt{mn}\}$ est une base de $K/\mathbf{Q}$. Indication: montrer que $\sqrt{m} \notin \mathbf{Q}[\sqrt{n}]$.

2) Soit $\alpha \in K$. Montrer que $\alpha \in O_K$ si et seulement si $\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}[\sqrt{n}]}(\alpha)$ et $\mathrm{N}_{K/\mathbf{Q}[\sqrt{n}]}(\alpha)$ sont dans $O_{\mathbf{Q}[\sqrt{n}]}$.

3) Montrer que tout $\alpha \in O_K$ s'écrit :

$$\alpha = a + b\sqrt{n} + \frac{c\sqrt{m} + d\sqrt{mn}}{2};$$

où $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ et $c \equiv d \pmod 2$.