UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
M1, Théorie des Nombres
2019-2020

Feuille 4. Anneaux commutatifs

Exercice 1. Soit A un anneau noethérien intègre. Montrer que tout élément $x \notin \{0\} \cup U(A)$ de A s'écrit comme produit d'irréductibles.

Exercice 2. Soit A un anneau intègre et noethérien vérifant tout idéal maximal est principal.

1) Montrer que tout idéal maximal de A est engendré par un élément irréductible.
2) Montrer que réciproquement, si $\pi \in A$ est un élément irréductible, alors l'idéal principal (π) est maximal.
3) Montrer que A est factoriel. Indication: soit $a = \pi_1 \cdots \pi_n$ et $a = \pi'_1 \cdots \pi'_m$ deux factorisations de $a \notin U(A) \cup \{0\}$ en produit d'irréductibles. En utilisant la question 1), montrer qu'il existe π'_i tel que π_1 et π'_i sont associés.

Soit I un idéal de A. Supposons que $I \neq \{0\}, A$.

4) Montrer qu'il existe un élément irréductible π tel que $I \subset (\pi)$. Indication: I est contenu dans un idéal maximal.
5) Soit $J = \{x \in A \mid \pi x \in I\}$. Montrer que J est un idéal de A et que $I \subset J$.
6) Montrer que $I \neq J$.
7) Montrer que I est principal. Indication: utiliser la question 3) et la noethérianité de A.

Exercice 3. Soit

$$A = \{f(X) \in \mathbf{Q}[X] \mid f(0) \in \mathbf{Z}\}.$$

1) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbf{Q}[X]$.
2) Déterminer le groupe des éléments inversibles de A.

Dans les questions 3-6) on décrit les éléments irréductibles de A.

3) Montrer que $a \in \mathbf{Z}$ est irréductible dans A si et seulement si $a = \pm p$, où p est un nombre premier.
4) Soit $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in A$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Supposons que $a_0 \neq 0$. Montrer que $f(X)$ est irréductible dans A si et seulement si $f(X)$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ et $a_0 = \pm 1$.
5) Soit $f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in A$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Supposons que $a_0 = 0$. Montrer que $f(X)$ est réductible.
6) Donner la liste d'éléments irréductibles de A.

7) Montrer que l'anneau A n'est pas factoriel.
8) Montrer que l'anneau A n'est pas noethérien.

Exercice 4. Soit $\mathfrak{p} \subset \mathbf{Q}[X, Y]$ l'idéal principal engendré par $X^2 - Y^3$.

1) Montrer que $X^2 - Y^3$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X, Y]$.
2) Montrer que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier. En déduire que l'anneau $A = \mathbf{Q}[X, Y]/\mathfrak{p}$ est intègre.

Tournez la page s.v.p.

3) Montrer que A n'est pas intégralement clos dans son corps des fractions. Indication: soient x et y les classes des polynômes X et Y dans A. Poser $\alpha = x/y$ et montrer que $\alpha \notin A$.

Exercice 5. Soit A un anneau et soit $F(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in A[X]$ un polynôme. Supposons que $B = A[X]/(F(X))$ soit fini sur A. Notons x la classe de X dans l'anneau quotient B.

1) Montrer qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ soit une famille génératrice de B comme A-module. En déduire qu'il existe un polynôme unitaire $P(X) \in A[X]$ de degré n tel que $P(x) = 0$.

2) Supposons de plus que A est intègre. Montrer que $F(X)$ est unitaire.

Exercice 6. Soit A un anneau noethérien intègre et soit M in idéal fractionnaire de A. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_A(M, A) \simeq M^{-1}.$$

Indication. Soit $f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$. Soit $m \in M$ un élément non nul. Montrer que tout $x \in M$ s'écrit sous la forme $x = \dfrac{a}{b} m$, $a, b \in A$ et que $f(x) = xc$ avec $c = f(m)/m$.