UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
M1, Théorie des Nombres
2020-2021

Feuille 8. Groupe des classes d'un corps de nombres

Les exercices de cette feuille portent sur le Chapitre 3 du cours. Voir surtout les Théorèmes 3.1.8 et 3.2.11, le Corollaire 3.2.13, mais aussi les exemples 3.1.11 et 3.2.14. Soit d un entier sans facteurs carrés.**Dans les exercices 1-6 on pose $K = \mathbf{Q}[\sqrt{d}]$ et on note O_K son anneau des entiers**.

Exercice 1. En utilisant le Théorème 3.2.11, montrer que O_K est principal pour $d = 2, 3, 5, 13, -1, -2, -3, -7$.

Exercice 2. 1) Montrer que tout idéal est équivalent à un idéal de norme 1 ou 2 pour $d = 6, 7, 17, 21, 29, 33, -5, -11, -15, -19$.
2) Montrer que pour $d = 21, 29, -11, -19$ l'anneau O_K est principal. Indication: utiliser l'exercice 2 de la feuille 4 pour montrer que dans les cas mentionnés 2 est inerte. En déduire qu'il n'y a pas d'idéaux de norme 2 dans les anneaux des entiers de ces corps.

Exercice 3. Supposons que $d \equiv 2, 3 \pmod 4$.
1) Montrer que O_K admet un idéal principal de norme 2 si et seulement si il existe des entiers a et b tels que $a^2 - db^2 = \pm 2$.
2) Montrer que O_K est principal pour $d = 6, 7$.

Exercice 4. Supposons que $d \equiv 1 \pmod 4$.
1) Montrer que O_K admet un idéal de norme 2 si et seulement si il existe des entiers a et b tels que $a^2 - db^2 = \pm 8$.
2) Montrer que O_K est principal pour $d = 17, 33$.
3) Montrer que $h_K = 2$ pour $d = -15$. Indication: examiner la décomposition de $2O_K$ dans O_K.

Exercice 5. Soit $d = 10$.
1) Montrer que tout idéal de O_K est équivalent à un idéal de norme $\leqslant 3$.
2) Étudier les décompositions de $2O_K$ et $3O_K$ dans O_K.
3) Montrer que les idéaux de norme 3 sont équivalents à un idéal de norme 2. Indication: utiliser la formule

$$(2 - \sqrt{10})(2 + \sqrt{10}) = -2 \cdot 3.$$

4) Montrer que $h_K = 2$.

Exercice 6. Soit $d = -6$. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que $h_K = 2$.

Exercice 7. Montrer que $K = \mathbf{Q}[\sqrt{-3}]$ est l'unique corps de nombre avec $|d_K| = 3$.

Exercice 8. Soit K un corps de nombres.
1) Soit $\mathfrak{q}$ un idéal maximal dont la classe dans $\mathrm{Cl}(O_K)$ est d'ordre m. Montrer qu'il existe une extension F/K de degré m telle que $\mathfrak{q}O_F$ soit principal.
2) Montrer qu'il existe une extension finie H/K telle que pour tout idéal I de O_K l'idéal IO_H soit principal.