UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
M1, Théorie des Nombres
2020-2021

Feuille 5. Anneaux de Dedekind

Exercice 1. Soit A un anneau de Dedekind.

1) Montrer que tout idéal fractionnaire $M \neq A$ de A possède une décomposition unique

$$M = {\mathfrak{p}_1}^{r_1} {\mathfrak{p}_2}^{r_2} \cdots {\mathfrak{p}_n}^{r_n},$$

avec $r_i \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

2) Montrer que $M \subset A$ si et seulement si $r_i > 0$ pour tout i.

Pour tout idéal I de A nous allons écrire sa factorisation en produit d'idéaux premiers sous la forme

$$I = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{r_\mathfrak{p}},$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers non nuls de A, $r_\mathfrak{p} \geqslant 0$, et $r_\mathfrak{p} = 0$ pour tous sauf un nombre fini de $\mathfrak{p}$.

Exercice 2. Soit A un anneau de Dedekind et soient I et J deux idéaux non-nuls dans A. Soient

$$I = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{r_\mathfrak{p}}, \qquad J = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{s_\mathfrak{p}},$$

les factorisations des idéaux I et J en produit d'idéaux premiers. Montrer les assertions suivantes :

1) $I + J = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\min\{r_\mathfrak{p}, s_\mathfrak{p}\}}$. Indication: $I + J$ est le plus petit idéal contenant à la fois I et J. Utiliser le théorème 2.1.15.

2) $I \cap J = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\max\{r_\mathfrak{p}, s_\mathfrak{p}\}}$.

3) On pose $D = I + J$ et on l'appelle le PGCD des idéaux I et J. Montrer que $I = DI'$ et $J = DJ'$, où $PGCD(I', J') = (1)$.

Exercice 3. Soit A un anneau de Dedekind ayant un nombre fini d'idéaux premiers. On veut montrer que A est principal. On note $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ les idéaux premiers non nuls de A.

1) Expliquer pourquoi pour chaque i l'inclusion $\mathfrak{p}_i^2 \subset \mathfrak{p}_i$ est stricte.

2) Soit $a \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_1^2$. Montrer que le système de congruences

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{\mathfrak{p}_1^2} \\ x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_n} \end{cases}$$

admet un solution dans A.

3) On note x une solution du système précédent. Montrer que $\mathfrak{p}_1 = xA$.

4) Montrer que tout idéal de A est principal.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 4. Soit A un anneau de Dedekind et soit $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ un ensemble fini d'idéaux premiers non nuls de A. On considère un idéal I de la forme

$$I = \mathfrak{p}_1{}^{r_1}\mathfrak{p}_2{}^{r_2} \cdots \mathfrak{p}_n{}^{r_n}, \qquad r_i \geqslant 1.$$

On fixe $a_i \in \mathfrak{p}_i^{r_i} \setminus \mathfrak{p}_i^{r_i+1}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

1) Montrer que le système de congruences

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{\mathfrak{p}_1^{r_1+1}} \\ x \equiv a_2 \pmod{\mathfrak{p}_2^{r_2+1}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x \equiv a_n \pmod{\mathfrak{p}_n^{r_n+1}} \end{cases}$$

admet une solution dans A.

2) Soit x une solution du système précédent. Montrer que l'idéal xA s'écrit sous la forme $xA = IJ$, où $PGCD(I, J) = (1)$.

3) Soit I' un idéal de A. Montrer, par la même méthode, que dans la question 2) on peut choisir $x \in A$ de telle façon que $PGCD(I', J) = (1)$.

Exercice 5. Soit A un anneau de Dedekind. Soit I un idéal non nul d'un anneaux de Dedekind A. On veut montrer que toute classe d'idéaux contient un idéal M tel que $PGCD(I, M) = (1)$. On fixe un idéal J de A et on considère la classe de J dans le groupe des classes.

1) Montrer qu'il existe $x, y \in A$ tel que les idéaux xA et yA se décomposent comme suit:

$$xA = JK, \qquad PGCD(J, K) = (1),$$
$$yA = KS \qquad PGCD(S, I) = (1).$$

2) On pose $\alpha = y/x$ et $M = \alpha J$. Montrer que M est un idéal de A vérifiant $PGCD(I, M) = (1)$.

Exercice 6. Soient A et B deux anneaux. Les addition et multiplication de l'anneau produit cartésien $A \times B$ sont définies composante par composante. En particulier l'élément unité est $e = (1, 1)$. Soit H un idéal de $A \times B$. Soit $I = \{a \in A \mid (a, 0) \in H\}$ et soit $J = \{b \in B \mid (0, b) \in H\}$. Montrer que ce sont respectivement des idéaux de A et de B et que $H = I \times J$. Indication: utiliser la multiplication par $e_1(1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ et l'égalité $e = e_1 + e_2$.