UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
M1, Théorie des Nombres
2020-2021

Feuille 3. Discriminant

Exercice 1. Soit K un corps de caractéristique 0. Le but de cet exercice est de calculer le discriminant d'un polynôme de la forme $P(X) = X^n + aX + b \in K[X]$. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de $P(X)$.

Supposons que $a, b \neq 0$.

1) Calculer $P'(X)$ est montrer que

$$P'(\alpha_i) = \alpha_i^{-1}(n(-a\alpha_i - b) + a\alpha_i).$$

En déduire que

$$P'(\alpha_i) = (n-1)a\alpha_i^{-1}(-nb/((n-1)a) - \alpha_i).$$

2) Montrer que $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n b$ et $\prod_{i=1}^{n} (-nb/(n-1)a - \alpha_i) = P(-nb/(n-1)a)$.

3) En déduire que

$$\mathrm{disc}(P(X)) = (-1)^{n(n-1)/2}(n^n b^{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}a^n).$$

4) Étudier le cas $b \neq 0, a = 0$.

5) Étudier le cas $b = 0, a \neq 0$.

Exercice 2. Montrer que si $L/\mathbf{Q}$ est galoisienne, alors L est totalement réel ou totalement imaginaire.

Exercice 3. Soient L et E deux corps de nombres isomorphes (comme extensions de $\mathbf{Q}$). Montrer qu'ils ont le même nombre de plongements réels (resp. imaginaires). Montrer aussi que $d_L = d_E$.

Exercice 4. Soit $K = \mathbf{Q}[\theta]$, où θ est une racine du polynôme $X^3 - X - 4$.

1) Calculer le discriminant $D_{K/\mathbf{Q}}(\Theta)$ de $\Theta = \{1, \theta, \theta^2\}$. Indication: on peut utiliser l'exercice 1) pour calculer le discriminant du polynôme $X^3 - X - 4$).

2) Calculer le discriminant $D_{K/\mathbf{Q}}(\varepsilon)$ de $\varepsilon = \{1, \theta, (\theta + \theta^2)/2\}$.

3) Montrer que $\alpha = (\theta+\theta^2)/2$ est un entier algébrique. Indication: calculer le polynôme minimal de α.

4) Montrer que $\varepsilon = \{1, \theta, (\theta + \theta^2)/2\}$ est une base de O_K sur $\mathbf{Z}$.

Exercice 5. Soit K une extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}$ de degré impair. Montrer que le discriminant $D = D_{O_K/\mathbf{Z}}$ de K est un carré dans $\mathbf{Z}$. Indication: utiliser la formule

$$D = (\det(\sigma_i(\varepsilon_j))_{i,j})^2,$$

où $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ est une base de O_K sur $\mathbf{Z}$. Montrer que $\mathbf{Q}[\sqrt{D}] \subset K$.