

Corrigé de l'examen du 15 décembre 2025.

Exercice 1. Polynômes bicarrés.

Soient $f(X) = X^4 + aX^2 + b \in \mathbf{Q}[X]$ un polynôme irréductible. On note K le corps de décomposition de $f(X)$ sur $\mathbf{Q}$ et l'on pose $G = \text{Gal}(K/\mathbf{Q})$. Soient $\pm\alpha$ et $\pm\beta \in K$ les racines de $f(X)$.

1) Montrer que $K = \mathbf{Q}[\alpha, \beta]$. Montrer que $\alpha^2\beta^2 = b$ et $\alpha^2 + \beta^2 = -a$.

Solution. Par définition, $K = \mathbf{Q}[\alpha, \beta, -\alpha, -\beta]$. Or il est clair que $-\alpha, -\beta \in \mathbf{Q}[\alpha, \beta]$. Donc $K = \mathbf{Q}[\alpha, \beta]$. Les éléments α^2 et β^2 sont les racines du polynôme $Y^2 + aY = b$. Par la relation coefficients-racines, on a $\alpha^2 + \beta^2 = -a$ et $\alpha^2\beta^2 = b$.

2) Supposons que b a une racine carrée dans $\mathbf{Q}$.

a) Montrer que $\mathbf{Q}[\alpha] = \mathbf{Q}[\beta]$

Solution. On écrit b sous la forme $b = c^2$, $c \in \mathbf{Q}$. Alors $\alpha^2\beta^2 = c^2$, d'où $\alpha\beta = \pm c$. On en déduit que $\alpha = \pm c\beta^{-1}$. Donc $\alpha \in \mathbf{Q}[\beta]$ et, par symétrie, $\beta \in \mathbf{Q}[\alpha]$. Cela implique que $\mathbf{Q}[\alpha] \subset \mathbf{Q}[\beta]$ et $\mathbf{Q}[\beta] \subset \mathbf{Q}[\alpha]$, d'où $\mathbf{Q}[\alpha] = \mathbf{Q}[\beta]$.

b) Soit γ une racine de $f(X)$. Prouver qu'il existe un unique élément $g \in G$ tel que $g(\alpha) = \gamma$ et déterminer $g(\beta)$ en fonction de γ .

Solution. Comme $f(X)$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$, les extensions $\mathbf{Q}[\alpha]$ et $\mathbf{Q}[\gamma]$ sont isomorphes. En fait, il existe un unique isomorphisme $\sigma : \mathbf{Q}[\alpha] \rightarrow \mathbf{Q}[\gamma]$ tel que $\sigma(\alpha) = \gamma$. Par le théorème de prolongement des homomorphismes, il existe un prolongement $g : K \rightarrow \bar{K}$ de σ à K . Comme $K/\mathbf{Q}$ est normale, on a $g(K) = K$. Donc $g \in G$. En outre, en écrivant $\beta = c/\alpha$ avec une racine carrée convenable c ($c^2 = b$), on a

$$g(\beta) = c/g(\alpha) = c/\gamma.$$

c) Prouver que $g^2 = id$ pour tout $g \in G$. A quel groupe connu G est-il isomorphe?

Solution. Soit $g \in G$. Alors $g(\alpha) \in \{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$. Si $g(\alpha) = \alpha$, alors $g = id$ et $g^2 = id$. Si $g(\alpha) = -\alpha$, alors $g^2(\alpha) = g(-\alpha) = -g(\alpha) = \alpha$, d'où $g^2 = id$. Si $g(\alpha) = \beta$, alors, en utilisant la question précédente, on trouve que

$$g^2(\alpha) = g(\beta) = c/g(\alpha) = c/\beta = \alpha.$$

Le même calcul montre que si $g(\alpha) = -\beta$, alors on a toujours $g^2(\alpha) = \alpha$.

Comme G est un groupe à 4 éléments, il est abélien et isomorphe à l'un des deux groupes $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Comme $g^2 = id$ pour tout $g \in G$, on en déduit que $G \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

3) Soit $d = a^2 - 4b$. On fixe des racines carrées δ et λ de d et b respectivement, à savoir $\delta^2 = d$ et $\lambda^2 = b$. Supposons que $\lambda \notin \mathbf{Q}[\delta]$.

a) Prouver que $\mathbf{Q}[\alpha] \neq \mathbf{Q}[\beta]$. (Indication : expliquer pourquoi il existe $g \in G$ tel que $g(\delta) = \delta$ et $g(\lambda) = -\lambda$, puis montrer que $\delta = \pm(\alpha^2 - \beta^2)$ et étudier l'action de g sur α et β).

Solution. On remarque que $d = a^2 - 4b = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$, d'où $\delta = \pm(\alpha^2 - \beta^2)$. En particulier, $\delta \in K$ et $\mathbf{Q}[\delta, \lambda] \subset K$.

Comme $\lambda \notin \mathbf{Q}[\delta]$, le degré de l'extension $\mathbf{Q}[\delta, \lambda]/\mathbf{Q}[\delta]$ est ≥ 2 . Or $\lambda^2 = b \in \mathbf{Q}$, d'où on tire que $[\mathbf{Q}[\delta, \lambda] : \mathbf{Q}[\delta]] = 2$. Par la correspondance de Galois, le groupe de Galois de cette extension est d'ordre 2. On note τ l'automorphisme non-trivial de $\mathbf{Q}[\delta, \lambda]$ sur $\mathbf{Q}[\delta]$;

on a $\tau(\lambda) = -\lambda$. Comme $\mathbf{Q}[\delta, \lambda] \subset K$, il existe un prolongement $g \in G$ de τ à K . Alors $g(\delta) = \delta$ et $g(\lambda) = \tau(\lambda) = -\lambda$.

L'automorphisme g permute les racines de $f(X)$. On montre d'abord que $g(\alpha) \in \{\alpha, -\alpha\}$. En effet, si $g(\alpha) = \pm\beta$, alors $g(\beta) = \pm\alpha$ et $g(\delta) = g(\alpha)^2 - g(\beta)^2 = \beta^2 - \alpha^2 = -\delta$ ce qui contredit le choix de g . Donc $g(\alpha) = \pm\alpha$.

Comme $\lambda = \pm\alpha\beta$ et $\lambda = \pm\alpha\beta$, on a $g(\alpha)g(\beta) = -\alpha\beta$. Si $g(\alpha) = \alpha$, cela implique que $g(\beta) = -\beta$, ce qui montre que g agit trivialement sur $\mathbf{Q}[\alpha]$ mais pas sur $\mathbf{Q}[\beta]$. Donc $\mathbf{Q}[\alpha] \neq \mathbf{Q}[\beta]$. Si $g(\alpha) = -\alpha$, la même formule montre $g(\beta) = \beta$, d'où on trouve que g agit trivialement sur $\mathbf{Q}[\beta]$ mais pas sur $\mathbf{Q}[\alpha]$, ce qui permet de conclure.

b) Déterminer le degré de $K/\mathbf{Q}$.

Solution. On a $\beta^2 = b/\alpha^2 \in \mathbf{Q}[\alpha]$. Comme $K = \mathbf{Q}[\alpha, \beta]$, on a $[K : \mathbf{Q}[\alpha]] \leq 2$. Donc le fait que $\mathbf{Q}[\alpha] \neq \mathbf{Q}[\beta]$ montre que $[K : \mathbf{Q}[\alpha]] = 2$. On en déduit que

$$[K : \mathbf{Q}] = [K : \mathbf{Q}[\alpha]] \cdot [\mathbf{Q}[\alpha] : \mathbf{Q}] = 2 \times 4 = 8.$$

c) Montrer que $\text{Gal}(K/\mathbf{Q}[\delta])$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Solution. Comme $[\mathbf{Q}[\delta] : \mathbf{Q}] = 2$, on a $[K : \mathbf{Q}[\delta]] = 4$. Donc $\text{Gal}(K/\mathbf{Q}[\delta])$ est un groupe d'ordre 4. Chaque élément g de ce groupe est complètement défini par son action sur α et β . La solution de la question 3a) montre que $g(\alpha) = \pm\alpha$ et $g(\beta) = \pm\beta$. On en déduit que $g^2(\alpha) = \alpha$ et $g^2(\beta) = \beta$, d'où $g^2 = id$. Donc $\text{Gal}(K/\mathbf{Q}[\delta])$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

d) A quel groupe connu G est-il isomorphe?

Solution. Soit $g \in \text{Gal}(K/\mathbf{Q}[\delta])$ l'automorphisme défini par $g(\alpha) = \alpha$ et $g(\beta) = -\beta$. Soit $h \in G$ un automorphisme vérifiant $h(\alpha) = \beta$ (on remarque qu'un tel h existe par le prolongement des homomorphismes). On voit que $gh(\alpha) = -\beta$ et $hg(\alpha) = \beta$. On en déduit que G est un groupe non-abélien d'ordre 8. Il y a, à isomorphisme près, exactement deux groupes non-abéliens d'ordre 8 : le groupe diédral D_8 et le groupe des quaternions H_8 . On sait que H_8 possède exactement un élément d'ordre 2. Or le sous-groupe $\text{Gal}(K/\mathbf{Q}[\delta])$ de G contient 3 éléments d'ordre 2. On en déduit que $G \simeq D_8$.

Exercice 2. Représentations du groupe S_4 .

On note S_4 le groupe des permutations de l'ensemble à quatre éléments $\{1, 2, 3, 4\}$. Rappelons que la signature $\varepsilon : S_4 \rightarrow \{1, -1\}$ est un morphisme de groupes.

1) Donner les classes de conjugaison de S_4 et le nombre d'éléments dans chaque classe. En déduire que S_4 admet exactement 5 représentations complexes irréductibles, à isomorphisme près. (Indication : penser au type d'une permutation, i.e. à sa décomposition comme produit de cycles disjoints).

Solution. Pour donner les classes de conjugaison, on utilise le fait que deux cycles de même longueur sont conjugués.

i) $C_1 = \{e\}$.

ii) C_2 : les transpositions (ij) . Le nombre d'éléments dans cette classe est $\binom{4}{2} = 6$.

iii) C_3 : les 3-cycles. Le nombre de 3-cycles est $\frac{4 \times 3 \times 2}{3} = 8$.

iv) C_4 : les 4-cycles. Le nombre de 4-cycles est $\frac{4 \times 3 \times 2}{4} = 6$.

v) C_5 : les produits de deux transpositions à supports disjoints. Le nombre d'éléments dans cette classe est $\frac{1}{2} \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{2 \times 1}{2} = 3$.

Le groupe S_4 admet exactement 5 classes de conjugaison, donc 5 représentations irréductibles, à isomorphisme près.

2) Donner deux représentations irréductibles de S_4 de dimension 1.

Solution. Toute représentation de dimension 1 est irréductible ; elle est donnée par un caractère qui se factorise par un morphisme $S_4/[S_4, S_4] \rightarrow \mathbf{C}^*$. Comme $[S_4, S_4] = A_4$ et $[S_4 : A_4] = 2$, le groupe S_4 admet exactement deux caractères, à savoir le caractère trivial et la signature $\varepsilon : S_4 \rightarrow \{1, -1\}$.

Soit V un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension 4. On fixe une base $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de V et on définit une représentation linéaire $\rho : S_4 \rightarrow \text{GL}(V)$ en posant :

$$\rho_\sigma \left(\sum_{i=1}^4 a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^4 a_i e_{\sigma(i)}, \quad \forall \sigma \in S_4.$$

3) Montrer que $\chi_\rho(\sigma)$ est égal au nombre de points fixes de σ agissant sur B et calculer $\chi_\rho(\sigma)$ sur chaque classe de conjugaison de S_4 .

Solution. Comme $\rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, la matrice $A(\sigma) = (a_{ij}(\sigma))_{1 \leq i, j \leq 4}$ de ρ_σ dans la base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ est donnée par $a_{ij}(\sigma) = 1$ si $i = \sigma(j)$ et $a_{ij}(\sigma) = 0$ sinon. Donc

$$\chi_\rho(\sigma) = \sum_{i=1}^4 a_{ii}(\sigma) = \text{Card}\{i \mid i = \sigma(i)\}.$$

4) Calculer $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle$. En déduire que ρ est la somme directe de deux représentations irréductibles.

Solution. On a

$$\begin{aligned} \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{\text{Card}(S_4)} & \left(\chi_\rho(e) \overline{\chi_\rho(e)} + \sum_{\sigma \in C_2} \chi_\rho(\sigma) \overline{\chi_\rho(\sigma)} + \sum_{\sigma \in C_3} \chi_\rho(\sigma) \overline{\chi_\rho(\sigma)} \right. \\ & \left. + \sum_{\sigma \in C_4} \chi_\rho(\sigma) \overline{\chi_\rho(\sigma)} + \sum_{\sigma \in C_5} \chi_\rho(\sigma) \overline{\chi_\rho(\sigma)} \right) \end{aligned}$$

En utilisant les questions 1) et 3), on obtient :

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{24} (4^2 + 6 \times 2^2 + 8 \times 1^2) = 2.$$

En comparant ce calcul avec la formule $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} m_\chi^2$, on obtient que ρ est la somme directe de deux représentations irréductibles non-isomorphes.

5) Montrer que V est la somme directe de la représentation triviale et d'une représentation irréductible $\pi : S_4 \rightarrow \text{GL}(W)$ de dimension 3. Calculer $\chi_\pi(\sigma)$ sur chaque classe de conjugaison de S_4 . Indication : quelle est l'action de S_4 sur $v = \sum_{i=1}^4 e_i$?

Solution. On voit que $\rho_\sigma(v) = v$ pour tout $\sigma \in S_4$. Donc le sous-espace $\mathbf{C}v$ est une sous-représentation triviale de V . Par le théorème de Maschke, $V = \mathbf{C}v \oplus W$, où W est une sous-représentation de dimension 3. Par la question 4), W est irréductible.

6) Montrer que l'application $\pi' : S_4 \rightarrow \text{GL}(W)$ définie par

$$\pi'(\sigma) = \varepsilon(\sigma)\pi(\sigma), \quad \sigma \in S_4,$$

est une représentation irréductible non isomorphe à π .

Solution. Soient $\tau, \sigma \in S_4$. Comme $\varepsilon(\sigma) \in \{1, -1\}$ est un scalaire, on a $\varepsilon(\sigma)\pi(\tau) = \pi(\tau)\varepsilon(\sigma)$, d'où :

$$\pi'(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau\sigma)\pi(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)\pi(\tau)\pi(\sigma) = (\varepsilon(\tau)\pi(\tau))(\varepsilon(\sigma)\pi(\sigma)) = \pi'(\tau)\pi'(\sigma).$$

Donc π' est une représentation linéaire. Supposons qu'elle est réductible. Alors il existe un sous-espace propre $U \subset W$ tel que $\pi'_\sigma(u) \in U$ pour tous $\sigma \in S_4$, $u \in U$. Comme $\pi_\sigma(u) = \varepsilon(\sigma)(\pi'_\sigma(u)) \in U$ on en déduit que π est réductible, ce qui contredit la question 5). Donc π' est irréductible.

7) Dresser la table de caractères de S_4 .

Solution. On a construit 4 représentations irréductibles non-isomorphes entre elles : la représentation triviale ρ_0 , la signature ε , π et π' . On note φ la dernière représentation, qui existe par la question 1). La formule $\text{Card}(S_4) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} n_\chi^2$ implique que pour la

dimension n_φ de φ on a

$$24 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + n_\varphi^2,$$

d'où $n_\varphi = 2$. On a la table suivante :

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_{ρ_0}	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_π	3	1	0	-1	-1
$\chi_{\pi'}$	3	-1	0	1	-1
χ_φ	2	0	-1	0	2

Ici, pour calculer χ_π , on utilise la décomposition $V = \mathbf{C}v \oplus W$, ce qui donne $\chi_\pi = \chi_\rho - \chi_{\rho_0}$, et la question 3) pour déterminer χ_ρ . Pour remplir la dernière ligne, on utilise la formule $\chi_\varphi(e) = n_\varphi = 2$ et l'orthogonalité des colonnes.

FIN.