UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
Théorie des Groupes

Examen, le 15 décembre 2022

Durée 3h. Documents non autorisés

Exercice 1. Groupes d'ordre p^3q. Soient p et q deux nombres premiers distincts. Le but de cet exercice est de montrer qu'un groupe fini d'ordre p^3q n'est pas simple. Soit G un groupe d'ordre p^3q. On note n_p (respectivement n_q) le nombre de p-Sylow (respectivement q-Sylow) de G.

1) Montrer que $n_p \in \{1, q\}$ et que $n_q \in \{1, p, p^2, p^3\}$.

2) Montrer que le cas $n_p = q$, $n_q = p$ est impossible. (Indication : utiliser le troisième théorème de Sylow).

3) Supposons que $n_q = p^3$. Montrer que G contient $(q-1)p^3$ éléments d'ordre q. En déduire que $n_p = 1$ et conclure.

4) Supposons que $n_q = p^2$.
a) Montrer que $q \mid p-1$ ou $q \mid p+1$.
b) Montrer que si $q \mid p-1$, alors $n_p = 1$.
c) Montrer que si $q \mid p+1$, alors $n_p = 1$ ou $p = 2$ et $q = 3$.
d) Supposons que $p = 2$, $q = 3$ et $n_q = n_3 = 2^2 = 4$. En considérant l'action de G sur l'ensemble $Syl_3(G)$ de ses 3-Sylow, prouver que G n'est pas simple.

5) Conclure.

Exercice 2. Soit $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

1) Prouver que K est une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$ de degré 4. Donner une base de K sur $\mathbf{Q}$.

2) Soit σ un automorphisme de $K/\mathbf{Q}$. Prouver que $\sigma(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$ et $\sigma(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$. Soit $\mu_2 = \{-1, 1\}$ le groupe multiplicatif des racines

carrées de l'unité. Prouver que l'application

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}) \to \mu_2 \times \mu_2$$

qui a tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ associe $\left(\dfrac{\sigma(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sigma(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right)$ est un isomorphisme. Déterminer les groupes $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}[\sqrt{2}])$ et $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}[\sqrt{3}])$.

3) Soit $\alpha = (2+\sqrt{2})(3+\sqrt{6})$. Calculer $\sigma(\alpha)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$. En déduire que $K = \mathbf{Q}[\alpha]$.

4) Prouver que pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ l'élément $\sigma(\alpha)/\alpha$ est un carré dans K, c'est-à-dire que pour tout σ il existe $a \in K$ tel que $\sigma(\alpha)/\alpha = a^2$.

5) Soit β une racine du polynôme $X^2 - \alpha \in K[X]$. On veut prouver par l'absurde que $\beta \notin K$. Supposons que $\beta \in K$.
 a) Soit $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}[\sqrt{2}]) = \{\mathrm{id}_K, \tau\}$. Prouver que $\beta\tau(\beta) \in \mathbf{Q}[\sqrt{2}]$.
 b) Calculer $\alpha\tau(\alpha)$ et en déduire que $\beta\tau(\beta) = \pm(2+\sqrt{2})\sqrt{3}$.
 c) Trouver une contradiction et conclure.

6) Soit $L = K[\beta]$. Prouver que $L/\mathbf{Q}$ est une extension normale de degré 8.

7) Définir des automorphismes de $L/\mathbf{Q}$ qui prolongent les éléments de $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$.

8) Soit

$$\mathbf{H}_8 = \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\right\},$$

où $i^2 = -1$. Vérifier que $\mathbf{H}_8$ est un groupe pour le produit matriciel. Est-il abélien?

9) Prouver que $H = \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathbf{H}_8$ est que $\mathbf{H}_8/A$ est isomorphe à $\mu_2 \times \mu_2$.

10) Prouver que $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ est isomorphe à $\mathbf{H}_8$.

FIN