UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Calcul différentiel

Corrigé de l'examen du 8 décembre 2016

Durée 3h. Aucun document autorisé.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Solution. On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & -3 \\ 2 & X-4 \end{vmatrix} = X^2 - 3X + 2$$

Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

Si $\binom{x}{y}$ est un vecteur propre qui correspond à $\lambda_1 = 1$, alors $-2x+3y = 0$. Donc l'espace propre E_{λ_1} est engendré par $\binom{3}{2}$. Si $\binom{x}{y}$ est un vecteur propre qui correspond à $\lambda_2 = 2$, alors $-3x + 3y = 0$. Donc l'espace propre E_{λ_2} est engendré par $\binom{1}{1}$.

2) Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale et calculer les matrices e^{At} et e^{-At}.

Solution. On a

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut réecrire ces deux égalités sous la forme :

$$A\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}, \qquad e^{At} = P\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}t\right)P^{-1}$$

On a

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}t\right) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & -3e^t + 3e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

et

$$e^{-At} = P\exp\left(\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\right)P^{-1} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} & -3e^{-t} + 3e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

3) Donner une base de l'espace vectoriel des solutions (*i.e.* un système fondamental de solutions) du système homogène

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t). \end{cases}$$

Solution. Les solutions du système homogène s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & -3e^t + 3e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} C_1(3e^t - 2e^{2t}) + C_2(-3e^t + 3e^{2t}) \\ C_1(2e^t - 2e^{2t}) + C_2(-2e^t + 3e^{2t}) \end{pmatrix} =$$
$$C_1 \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3e^t + 3e^{2t} \\ -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Donc le système

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3e^t + 3e^{2t} \\ -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix} \right\}$$

est une famille génératrice de l'espace des solutions. Comme la dimension de l'espace des solutions d'un système de taille 2 est égale à 2, cette famille est une base.

Seconde méthode. On a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

En posant $\binom{D_1}{D_2} = P^{-1} \cdot \binom{C_1}{C_2}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{2t} \\ 2e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$$
$$= D_1 \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + D_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le système

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de l'espace vectoriel des solutions.

4) Donner la solution générale du système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) + e^t \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t). \end{cases}$$

Solution. On a

$$\int_0^t e^{-As}B(s)ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 3e^{-s}-2e^{-2s} & -3e^{-s}+3e^{-2s} \\ 2e^{-s}-2e^{-2s} & -2e^{-s}+3e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ 0 \end{pmatrix} ds =$$
$$= \int_0^t \begin{pmatrix} 3-2e^{-s} \\ 2-2e^{-s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 3t+2e^{-t}-2 \\ 2t+2e^{-t}-2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit une solution pa particulière :

$$\begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} 3t+2e^{-t}-2 \\ 2t+2e^{-t}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t+3te^t \\ 2e^t+2te^t \end{pmatrix} - 2e^{At}.$$

Comme $2e^{At}$ est une solution du système homogène associé, on peut remplacer cette solution particulière par $\binom{2e^t+3te^t}{2e^t+2te^t}$. Alors la solution générale du système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t+3te^t \\ 2e^t+2te^t \end{pmatrix} + e^{At}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} x(t) &= (2+3t)e^t + C_1(3e^t-2e^{2t}) + C_2(-3e^t+3e^{2t}) \\ y(t) &= 2(1+t)e^t + C_1(2e^t-2e^{2t}) + C_2(-2e^t+3e^{2t}), \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Seconde méthode. On pose

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Alors le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} + P^{-1}\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} a'(t) = a(t) + e^t, \\ b'(t) = 2b(t) - 2e^t. \end{cases}$$

La méthode de variation des constantes donne $a(t) = te^t + F_1e^t$ et $b(t) = 2e^t + F_2e^{2t}$, où $F_1, F_2 \in \mathbf{R}$. Donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad F_1, F_2 \in \mathbf{R}.$$

Exercice 2. On note $M_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbf{R}$. On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbf{R})$ et une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ et on considère l'application $f : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ donnée par $f(X) = XAX$.

1) Montrer que f est différentiable en tout point $X \in M_n(\mathbf{R})$ et calculer $D(f)_X$ (donner la formule explicite pour $D(f)_X(H)$, $H \in M_n(\mathbf{R})$).

Solution. Soit $H \in M_n(\mathbf{R})$. Alors

$$f(X+H) = (X+H)A(X+H) = f(X) + HAX + XAH + HAH.$$

Soit $L(H) = HAX + XAH$. On vérifie facilement que L est linéaire. De plus, $L(H)$ est continue comme $M_n(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie. Posons $\varepsilon(H) = \frac{1}{\|H\|}HAH$ si $H \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$. Alors

$$f(X+H) = f(X) + L(H) + |H\|\varepsilon(H).$$

Comme $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative, on a

$$\|\varepsilon(H)| = \|H\|^{-1}\|HAH\| \leqslant \|A\|\|H\| \to 0$$

quand $H \to 0$. Donc f est différentiable et

$$D(f)_X(H) = L(H) = HAX + XAH.$$

2) Montrer que $\|D(f)_X\| \leqslant 2\|A\| \cdot \|X\|$. En déduire que f est une application continûment différentiable.

Solution. Comme la norme $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative, on a

$$\begin{aligned}(1)\quad \|D(f)_X(H)\| &= \|HAX + XAH\| \leqslant \|HAX\| + \|XAH\| \leqslant \\ &\leqslant \|H\| \cdot \|A\| \cdot \|X\| + \|X\| \cdot \|A\| \cdot \|H\| = 2\|A\| \cdot \|X\| \cdot \|H\|.\end{aligned}$$

Donc $\|D(f)_X\| \leqslant 2\|A\| \cdot \|X\|$.

Pour montrer que f est continûment différentiable if faut prouver que l'application $M_n(\mathbf{R}) \to L(M_n(\mathbf{R}), M_n(\mathbf{R}))$ donnée par $X \mapsto D(f)_X$ est continue. Soient $X_1, X_2 \in M_n(\mathbf{R})$. Alors on peut remarquer que $D(f)_{X_1} - D(f)_{X_2} = D(f)_{X_1 - X_2}$, d'où

$$\|(D(f)_{X_1} - D(f)_{X_2}\| = \|D(f)_{X_1-X_2}\| \leqslant 2\|A\| \cdot \|X_1 - X_2\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. En posant $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|A\|}$ on trouve que $\|(D(f)_{X_1} - D(f)_{X_2}\| < \varepsilon$ si $\|X_1 - X_2\| < \delta$. Donc l'application $X \mapsto D(f)_X$ est continue.

3) Énoncer le théorème d'inversion locale.

4) Supposons que A est inversible. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute matrice $B \in M_n(\mathbf{R})$ vérifiant $\|B - A^{-1}\| < \varepsilon$ l'équation $XAX = B$ admet une solution dans $M_n(\mathbf{R})$.

Solution. On a $f(A^{-1}) = A^{-1}$ et $D_{A^{-1}}(H) = 2H$. C'est un isomorphisme de $M_n(\mathbf{R})$ sur $M_n(\mathbf{R})$ et par le théorème d'inversion locale il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute matrice $B \in M_n(\mathbf{R})$ vérifiant $\|B - A^{-1}\| < \varepsilon$ il existe une matrice X telle que $f(X) = XAX = B$.

Exercice 3. 1) Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = t^2 x(t)^2 - t^2. \qquad (*)$$

2) Montrer que pour tout x_0 il existe une unique solution maximale de l'équation (*) vérifiant $x(0) = x_0$.

Solution. On a $x'(t) = f(t, x(t))$, où $f(t,x) = t^2x^2 - t^2$. Il est clair que $f(t,x)$ est continûment différentiable, donc elle est localement lipschitzienne en x. par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout x_0 il existe une unique solution maximale de l'équation (*) vérifiant $x(0) = x_0$.

3) Trouver les solutions maximales des problèmes de Cauchy $x(0) = -1$ et $x(0) = 1$.

Solution. On vérifie directement que $x(t) = 1$ et $x(t) = -1$ ($t \in \mathbf{R}$) sont les solutions de ces problèmes de Cauchy.

4) Énoncer le théorème des bouts.

Pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$ on note $(x(t),]a,b[)$ la solution maximale du problème de Cauchy $x(0) = x_0$.

Dans la question 5) on suppose que $x_0 \in]-1,1[$.

5a) Montrer que la fonction $x(t)$ est strictement décroissante. En déduire que $]a,b[=]-\infty,+\infty[$.

Solution. On montre d'abord que $x(t) \in]-1,1[$ pour tout $t \in]a,b[$. En effet, si, par exemple, $x(\tau) \geqslant 1$, alors par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $s \in]a,b[$ tel que $x(s) = 1$. En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz et la question 3) on en déduit que alors $x(t) = 1$ pour tout $t \in]a,b[$. Contradiction.

Comme $x(t) \in]-1,1[$, on voit que $x'(t) = t^2(x(t)^2 - 1) < 0$ pour tout $t \neq 0$ et $x'(0) = 0$. On en déduit que $x(t)$ est strictement décroissante.

Supposons que $b < +\infty$. Alors par le théorème des bouts $\lim_{t\to b^-} |x(t)| = +\infty$. Or $x(t) \in]-1,1[$ pour tout $t \in]a,b[$. Donc $b = +\infty$. Le même raisonnement montre que $a = -\infty$.

5b) Déterminer $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ et $\lim_{t\to-\infty} x(t)$.

Solution. Comme $x(t)$ est strictement décroissante et bornée, elle admet une limite finie quand $t \to +\infty$. Soit $A = \lim_{t\to+\infty} x(t) \geqslant -1$. On va prouver par l'absurde que $A = -1$. Supposons que $A > -1$. Alors $c = 1 - A^2 > 0$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $x'(t) = t^2(x(t)^2 - 1) \leqslant -ct^2$.

On en déduit que

$$x(t) - x(0) = \int_0^t x'(s)ds \leqslant -c\int_0^t s^2 ds = -ct^3/3.$$

Donc $x(t) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$, ce qui nous donne une contradiction.

Dans la question 6) on suppose que $x_0 > 1$.

6a) Montrer que $x(t)$ est strictement croissante. En déduire que $a = -\infty$ et déterminer $\lim_{t\to-\infty} x(t)$.

Solution. En reprenant les arguments de la question 5a) on montre que $x(t) > 1$ pour tout $t \in]a, b[$. Alors $x'(t) > 0$ pour tout $t \neq 0$ et $x'(0) = 0$. On en déduit que $x(t)$ est strictement croissante. Supposons que $a > -\infty$. Alors par le théorème des bouts $\lim_{t\to a^+} |x(t)| = +\infty$. Or $1 < x(t) < x(0)$ pour tout $t \in]a, 0[$, ce qui nous donne une contradiction. Donc $b = +\infty$.

Comme $x(t)$ est strictement croissante et $x(t) > 1$ pour tout $t \in]-\infty, b[$ elle admet une limite finie quand $t \to -\infty$. Soit $B = \lim_{t\to-\infty} x(t) \geqslant 1$. On va prouver par l'absurde que $B = 1$. Supposons que $B > 1$. Alors $d = B^2 - 1 > 0$ et pour tout $t \leqslant 0$ on a $x'(t) = t^2(x(t)^2 - 1) \geqslant dt^2$. On en déduit que

$$x(0) - x(t) = \int_t^0 x'(s)ds \geqslant d\int_t^0 s^2 ds = -dt^3/3.$$

Donc $x(t) \to -\infty$ quand $t \to -\infty$. Contradiction.

On veut prouver par l'absurde que $b < +\infty$. Supposons que $b = +\infty$.

6b) Montrer que $x(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. En déduire qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $x'(t) > t^2x(t)^2/2$.

Solution. Comme $x(t)$ est croissante et $x(0) = x_0 > 1$, on a que $x'(t) \geqslant \alpha t^2$, $\alpha = (x_0^2 - 1)$ pour tout $t > 0$. Donc

$$x(t) \geqslant x_0 + \alpha\int_0^t s^2 ds = x_0 + \alpha t^3/3, \qquad t \geqslant 0.$$

On en déduit que $x(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$.

Comme $x(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, il existe $t_0 > 0$ tel que $x(t)^2/2 > 1$ pour tout $t > t_0$. Alors

$$x'(t) = t^2(x(t)^2 - 1) > t^2x(t)^2/2, \qquad t > t_0.$$

6c) Montrer que pour tout $t > t_0$ on a

$$\frac{1}{x(t_0)} - \frac{1}{x(t)} \geqslant \frac{t^3 - t_0^3}{6}$$

et conclure.
Solution. On a

$$\frac{1}{x(t_0)} - \frac{1}{x(t)} = \int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)^2} ds \geqslant \int_{t_0}^{t} \frac{s^2}{2} ds = \frac{t^3 - t_0^3}{6}$$

En particulier, $\frac{1}{x(t_0)} \geqslant \frac{t^3 - t_0^3}{6}$ pour tout $t > t_0$, ce qui nous donne une contradiction. Donc $b < +\infty$.

FIN