UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
M1, Théorie de Galois et représentations
2023-2024

Devoir Maison 1

À rendre en TD la semaine du 16 octobre 2023

Exercice 1. Soit $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un automorphisme du corps des nombres réels $\mathbf{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$.

1) Montrer que $\sigma(n) = n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis que $\sigma(r) = r$ pour tout $r \in \mathbf{Q}$.

2) Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$ on a $\sigma(x) > 0$.

3) Montrer que l'application σ est strictement croissante.

4) Conclure.

Exercice 2. Soit K un corps de caractéristique p et soit $P(X) \in K[X]$ un polynôme qui s'écrit $P(X) = Q(X^p)$ pour un certain $Q(X) \in K[X]$. Soit $P(X) = F(X) \cdot G(X)$ une factorisation de $P(X)$ telle que $\mathrm{PGCD}(F, G) = 1$.

1) Montrer que $F'(X) = G'(X) = 0$. En déduire que $F(X)$ et $G(X)$ sont des polynômes en X^p.

On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Soit $Q(X) = X^p - X - a$ où $a \in K \setminus K^p$. On suppose que $Q(X)$ n'a pas de racine dans K.

2) Soit α une racine de $Q(X)$ dans $\overline{K}$. Montrer que les racines de $Q(X)$ dans $\overline{K}$ sont les éléments de la forme $\alpha + c$ où $c \in \mathbf{F}_p \subset K$. vérifie $c^p = c$.

3) Montrer que l'extension $K[\alpha]/K$ est normale et séparable.

4) En déduire que $Q(X)$ est irréductible. Indication : si $\sigma : K[\alpha]/K \to K[\alpha]/K$ est un K-morphisme, alors pour tout $i \in \mathbf{N}$ l'application $\sigma^i = \underbrace{\sigma \cdot \sigma \cdots \sigma}_{i \text{ fois}} : K[\alpha]/K \to K[\alpha]/K$ est un K-morphisme.

5) Montrer que le polynôme $P(X) = X^{p^2} - X^p - \alpha$ est irréductible. Soit β une racine de $P(X)$. Quel est le nombre de K-morphismes de $K[\beta]$ dans $\overline{K}$?

FIN