

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
Théorie de Galois et représentations des groupes finis

Devoir surveillé, le 23 octobre 2025

Durée 2h. Documents non autorisés

Exercice 1. Soit K un corps de caractéristique p . On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K .

Partie I. Soit $Q(X) = X^p - X - a$ où $a \in K$. On suppose que $Q(X)$ n'a pas de racine dans K .

1) Soit α une racine de $Q(X)$ dans $\overline{K}$. Montrer que les racines de $Q(X)$ dans $\overline{K}$ sont les éléments de la forme $\alpha + c$ où $c \in \mathbf{F}_p \subset K$.

2) Montrer que l'extension $K[\alpha]/K$ est normale et séparable.

3) En déduire que $Q(X)$ est irréductible. Indication : si $\sigma : K[\alpha]/K \rightarrow K[\alpha]/K$ est un K -morphisme, alors pour tout $i \in \mathbf{N}$ l'application $\sigma^i = \underbrace{\sigma \cdot \sigma \cdots \sigma}_{i \text{ fois}} : K[\alpha]/K \rightarrow K[\alpha]/K$ est un K -morphisme.

Partie 2.

4) Soit $P(X) \in K[X]$ un polynôme qui s'écrit sous la forme $P(X) = H(X^p)$ pour un certain $H(X) \in K[X]$. Soit $P(X) = F(X) \cdot G(X)$ une factorisation de $P(X)$ telle que $\text{PGCD}(F, G) = 1$. Montrer que $F'(X) = G'(X) = 0$. En déduire que $F(X)$ et $G(X)$ sont des polynômes en X^p , i.e. que $F(X) = R(X^p)$ et $G(X) = S(X^p)$ pour certains $R, S \in K[X]$.

5) Montrer que le polynôme $P(X) = X^{p^2} - X^p - a$ est irréductible sur K . Soit β une racine de $P(X)$. Quel est le nombre de K -morphisms de $K[\beta]$ dans $\overline{K}$?

Exercice 2. Soit L/K une extension de corps finie. Pour tout élément α de L on note $\psi_\alpha : L \rightarrow L$ l'application $\psi(x) = \alpha x$. Il est clair que ψ_α est une application K -linéaire.

1) On considère L comme un K -espace vectoriel. On fixe une base

$\mathcal{B}$ de L/K et l'on note $M_{\alpha, \mathcal{B}}$ la matrice de ψ_α dans $\mathcal{B}$. Montrer que le déterminant $\det(M_{\alpha, \mathcal{B}})$ ne dépend pas du choix de la base.

On pose $N_{L/K}(\alpha) = \det(M_{\alpha, \mathcal{B}})$ et on l'appelle la norme de α dans l'extension L/K .

2) Montrer que $N_{L/K}(\alpha\beta) = N_{L/K}(\alpha)N_{L/K}(\beta)$ pour tous $\alpha, \beta \in L$.

3) On fixe un élément $\alpha \in L$ et l'on note $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ son polynôme minimal sur K . Montrer que $N_{K[\alpha]/K}(\alpha) = (-1)^n a_0$.

4) Supposons que L/K est séparable. Montrer la formule

$$N_{K[\alpha]/K}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \text{Hom}_K(K[\alpha], \bar{K})} \sigma(\alpha).$$

5) En déduire que $N_{L/K}(\alpha) = \prod_{\tau \in \text{Hom}_K(L, \bar{K})} \tau(\alpha)$ si L/K est séparable.

6) Soit $K \subset L \subset M$ une tour d'extensions finies séparables. Montrer que $N_{M/K}(\alpha) = N_{M/L}(N_{L/K}(\alpha))$ pour tout $\alpha \in M$.

FIN