UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
M1, Théorie de Galois et représentations
2022-2023

Devoir Maison 1

À rendre en TD le 12 octobre 2022 au plus tard

Exercice 1. Soient $(G, \cdot)$ un groupe et $H \trianglelefteq G$. Montrer que si $H \cap [G, G] = \{e\}$, alors $H \subseteq Z(G)$.

Exercice 2. Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini et $H \trianglelefteq G$. On pose $m = (G : H)$ et $n = |H|$. Montrer que si $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$, alors H est l'unique sous-groupe de G d'ordre n.

Exercice 3. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini. Soit H un sous-groupe distingué de G dont l'ordre $|H|$ est le plus petit nombre premier p divisant l'ordre de G. En considérant l'action par conjugaison de G sur H, montrer que $H \leqslant Z(G)$.

Exercice 4. Soit K un corps. Dans cet exercice, on étudie le groupe $\mathrm{GL}_2(K)$. Pour tous $i, j \in \mathrm{N}$ tels que $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$ on note E_{ij} la matrice $E_{ij} := (e_{kl}^{(i,j)})_{1 \leqslant k,l \leqslant 2}$ définie par

$$e_{k,l}^{(i,j)} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = i \text{ et } l = j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $a \in K$, on pose $T_{ij}(\alpha) := I_2 + \alpha E_{ij}$.

Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in K^2$, on note $D(\lambda)$ la matrice diagonale $D(\lambda) := \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

1) Soit $A \in \mathrm{M}_2(K)$. Montrer que la multiplication de A à droite (respectivement à gauche) par une matrice $T_{ij}(a)$ correspond à une transformation élémentaire sur les colonnes (respectivement les lignes) de A que l'on précisera.

2) Montrer que $S = \{T_{ij}(\alpha) \mid \alpha \in K^*,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant 2\} \cup \{D(\lambda) \mid \lambda \in (K^*)^2\}$ est une partie génératrice de $\mathrm{GL}_2(K)$.

3) Montrer la formule

$$[T_{ij}(\alpha), T_{ii}(\beta)] = T_{ij}(-\alpha\beta), \qquad \forall \beta \neq -1.$$

4) Calculer le commutant $[D(\lambda), J_2]$, où $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5) En déduire que $[\mathrm{GL}_2(K), \mathrm{GL}_2(K)] = \mathrm{SL}_2(K)$ sauf si $K = \mathbf{F}_2$.

FIN