M1 – Mathématiques fondamentales Année 2019-2020
Théorie des groupes Université de Bordeaux

Devoir surveillé

7 novembre 2019
Durée 1h45

Question de cours
Soient G un p-groupe et X un ensemble fini sur lequel agit G. On note X^G l'ensemble des points fixes de l'action de G sur X. Montrer que

$$|X^G| \equiv |X| \mod p.$$

Exercice 1
Soit G un groupe d'ordre $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$.

1) Montrer que G admet un sous-groupe distingué d'ordre 11 et un sous-groupe distingué d'ordre 7.
Dans la suite on note H un sous-groupe distingué d'ordre 11 de G.
2) Justifier que H est cyclique. On note x un générateur de H.
3) Montrer que G admet un sous-groupe K d'ordre 21.
Dans la suite, on fixe un élément $g \in K$.
4) Soit ℓ un entier tel que $gxg^{-1} = x^\ell$. Déterminer la classe modulo 11 de ℓ^{21}.
5) Déduire la classe modulo 11 de ℓ, puis que G est isomorphe au produit direct de H et K.
6) Déterminer les morphismes de groupes de K dans le groupe des automorphismes de H (on rappelle que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$). En déduire une nouvelle preuve du fait que G est isomorphe au produit direct de H et K.
7) Montrer que G n'est pas forcément abélien.

Exercice 2
Soient p un nombre premier et G le groupe des permutations de $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ (G est isomorphe à S_p). Pour tout $(a, b) \in F^\times \times F$, on définit $f_{a,b} \in G$ par $f_{a,b}(x) = ax + b$.
On note T le sous-groupe engendré par $f_{\overline{1},\overline{1}}$ et $A = \{f_{a,b} | \, (a, b) \in F^\times \times F\}$.

1) Déterminer (à la main) le nombre de sous-groupes d'ordre p de G. Montrer qu'ils sont tous conjugués. En déduire l'ordre de leur normalisateur puis que $N_G(T)$ (le normalisateur de T) est égal à A.
2) Soit H un sous-groupe de G agissant transitivement[1] sur F. Soit $K \neq \{1\}$ un sous-groupe distingué de H.
Montrer que H envoie K-orbite sur K-orbite en déduire que K agit transitivement.
3) Montrer que tout sous-groupe abélien de G agissant transitivement sur F est conjugué à T.
4) Soit H un sous-groupe de G agissant transitivement sur F. Montrer que si H contient un sous-groupe abélien distingué $K \neq \{1\}$, alors H est conjugué à un sous-groupe de A.

1. ie tel qu'il existe une orbite égale à tout F