M1 – Mathématiques fondamentales Année 2019-2020
Théorie des groupes Université de Bordeaux

Devoir surveillé

12 novembre 2020
Durée 1h45

Question de cours
Soient G un groupe fini et S un p-Sylow de G. Montrer que

$$N_G(N_G(S)) = N_G(S),$$

où $N_G(H)$ désigne le normalisateur de H dans G.

Exercice 1
Soit G un groupe d'ordre 144. On veut montrer que G n'est pas simple (c'est-à-dire que G contient un sous-groupe distingué propre). On procède par l'absurde, on suppose donc que G est simple.

1) Soit X un ensemble. Montrer que si $|X| \leq 5$ alors toute action de G sur X est triviale. En déduire que G ne possède pas de sous-groupes d'ordre 36 ou 72.
2) Montrer que le nombre de 3-Sylow de G est forcément 16.
3) Montrer que G possède deux 3-Sylow, notés S_1 et S_2, tels que $|S_1 \cap S_2| = 3$. On note x un générateur de $S_1 \cap S_2$.
4) Soit $C = \{g \in G \mid gx = xg\}$, le centralisateur de x. Montrer que $|C| = 18$ (on pourra utiliser sans preuve le fait que tout groupe d'ordre 9 est abélien).
5) Montrer que S_1 et S_2 sont distingués dans C. Conclure.

Exercice 2
On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des groupes finis tels que pour tout sous-groupe distingué $H \neq G$, le centre de G/H, noté $Z(G/H)$, n'est pas réduit à l'élément neutre (en particulier $Z(G) \neq \{1\}$). On remarquera que $\{1\} \in \mathcal{N}$[1].

1) Montrer que tout p-groupe et tout groupe abélien fini appartient à $\mathcal{N}$.
2) Montrer que si $G \in \mathcal{N}$ et si H est un sous-groupe distingué de G alors $G/H \in \mathcal{N}$.
3) Soit $G \in \mathcal{N}$ et K un sous-groupe de G. Montrer que si $K \neq G$ alors $N_G(K) \neq K$ (lorsque $Z(G) \leq K$, on pourra considérer le groupe $G/Z(G)$).
4) En déduire que si $G \in \mathcal{N}$ alors tout p-Sylow de G est distingué dans G.
5) Soient $G \in \mathcal{N}$, S un p-Sylow de G et R un q-Sylow de G, avec $p \neq q$. Montrer que si $(r, s) \in R \times S$ alors $rs = sr$.
6) En déduire que si $G \in \mathcal{N}$ alors G est isomorphe à un produit direct de p-groupes.

1. vu que $\forall x \in \emptyset, P(x)$ est vraie quelle que soit la proposition P