M1 – Mathématiques fondamentales Année 2021-2022
Théorie des groupes Université de Bordeaux

Devoir surveillé

28 octobre 2021

— Durée 1h30 —

Exercice 1
On veut (encore) montrer que si p est un nombre premier et G un groupe fini alors G contient un p-Sylow. On suppose connu le théorème de Cauchy affirmant que si p est premier et divise $|G|$ alors G contient un élément d'ordre p.

On procède par récurrence sur l'ordre de G. Le résultat est évident si $|G| = 1$. Soit $n > 1$, tel que **le résultat est vrai pour tout groupe d'ordre strictement inférieur à n.** Soit G un groupe fini d'ordre n et p un diviseur premier de n.

1) Montrer que si G possède un sous-groupe propre d'indice premier avec p alors G possède un p-Sylow.

   On suppose donc dorénavant que tous les sous-groupes propres de G ont un indice divisible par p.

2) Montrer en faisant agir G sur lui-même par conjugaison que p divise l'ordre de $Z(G)$, le centre de G.
3) Déduire que G contient un sous-groupe distingué d'ordre p.
4) Montrer que G possède un p-Sylow. Conclure.

Exercice 2
Soit n, ℓ et k des entiers strictement supérieurs à 1. On note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on note son ordre $\varphi(n)$.

1) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

   est un isomorphisme de groupes.

2) Soit G un groupe d'ordre k. Montrer que si $k \wedge n \neq 1$ alors il existe un morphisme de groupes non constant de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans G.
3) Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe un groupe d'ordre p^3 non abélien (on rappelle que $\varphi(p^j) = p^{j-1}(p-1)$).

Exercice 3

Soit G un groupe d'ordre 400. **Supposons G simple.**

1) Montrer que le nombre de 5-Sylow de G est 16.
2) Dans cette question, on suppose que si P et P' sont deux 5-Sylow distincts de G, alors $P \cap P' = \{1\}$.
   En considérant la réunion des 5-Sylow, calculer le nombre de 2-Sylow de G, et aboutir à une contradiction.
3) Dans cette question, on suppose qu'il existe deux 5-Sylow distincts P et P' de G tels que $H := P \cap P' \neq \{1\}$. On note G' le sous-groupe de G engendré par P et P'.
   a) Montrer que H est distingué dans G'.
   b) Montrer que le nombre de 5-Sylow de G' est au moins 16.
   c) En déduire que $G' = G$, puis une contradiction.
4) que peut-on en conclure ?