FACTORISATION SPATIALE

GILLES CASSIER et JEAN ESTERLE

Résumé : Nous nous intéressons dans un premier temps à trouver des compressions les meilleures possibles pour un opérateur polynomialement borné T qui appartient à la classe $\mathbb{A}_{1,1}$ introduite par H. Bercovici, C. Foias et C. Pearcy dans [3]. Dans un deuxième temps, nous utilisons ces compressions pour obtenir des factorisations spatiales, avec un seul vecteur, pour de larges classes de fonctions positives semi continues inférieurement f, dans le sens où il existe un vecteur x de l'espace de Hilbert H tel que $\widehat{f}(n) =< T^{-n}x \mid x >$ lorsque n est un entier négatif.

Key words and phrases : Compressions, dilatations, opérateurs polynomialement bornés, factorisation.

Mathematics Subject Classification 2000: 47A20, 47A60, 47L45.

1. Introduction et préliminaires.

Soient H un espace de Hilbert séparable, $B(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur H et $B_1(H)$ l'espace des opérateurs à trace. La dualité de Schatten nous dit que $B(H)$ est le dual de $B_1(H)$. On notera $Lat(T)$ l'ensemble des sous espaces fermés de H qui sont invariants par un opérateur $T \in B(H)$. On dit que $T \in B(H)$ est polynomialement borné (notation $T \in PB(H)$) si il existe une constante $M \in [1, +\infty[$ telle que

$$\|p(T)\| \leq M \sup_{|z|=1} |p(z)| \tag{1.1}$$

pour tout polynôme appartenant à $\mathbb{C}[X]$. On notera par M_T la constante optimale dans (1.1). Avec l'inégalité de von Neumann, on sait que toute contraction T est polynomialement bornée avec $M_T = 1$. Ainsi tout opérateur similaire à une contraction appartient à $PB(H)$. On sait également [27] qu'il existe dans $PB(H)$ des opérateurs qui ne sont pas similaires à des contractions. Récemment, il a été prouvé dans [1], en utilisant une variante du lemme de Zenger (la version classique peut-être trouvée dans [7], p. 18-20) et des techniques de factorisation proches de celles introduites par S. Brown [8], que tout opérateur polynomialement borné sur un espace de Banach dont le spectre contient le cercle unité admet des sous espaces invariants non triviaux, généralisant ainsi le résultat de S. Brown, B. Chevreau et C. Pearcy [9]. Ce nouveau résultat relance les questions de factorisation pour des opérateurs $T \in PB(H)$. On rappelle que $C_{0,.}$ est la classe des éléments de $PB(H)$ pour lesquels la suite $(\|T^n x\|)_{n\geq 0}$ converge vers 0 pour tout $x \in H$, et que $C_{.,0}$ et $C_{0,0}$ sont définies en posant $C_{.,0} = (C_{0,.})^*$

et $C_{0,0} = C_{0,.} \cap C_{.,0}$. Si $T \in PB(H)$ et si (x,y) est un couple d'éléments de H, il existe une mesure μ (non unique) sur $[0,2\pi]$ telle que

$$(1.2) \qquad \int_0^{2\pi} p(e^{it})d\mu(t) =< p(T)x \mid y >$$

pour tout polynôme p à coefficients dans $\mathbb{C}$. On dit qu'un opérateur de $PB(H)$ est absolument continu (resp. singulier) si pour tout couple $(x,y) \in H \times H$ les mesures μ solutions de (1.2) sont absolument continues (resp. singulières) par rapport à la mesure de Lebesgue m. Un opérateur polynomialement borné T se décompose de façon unique comme somme directe (non orthogonale en général) d'un opérateur absolument continu T_1 et d'un opérateur singulier T_2 [23].

On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, et on note $\mathbb{T}$ le cercle unité. Les espaces $L^p = L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq +\infty$, sont les espaces de Lebesgue usuels relativement à la mesure de Lebesgue m, et les espaces $H^p(\mathbb{T})$ sont les espaces de Hardy classiques. L'espace $H^\infty(\mathbb{T})$ s'identifie au dual de l'espace L^1/H_0^1 (où $H_0^1 = \left\{f \in L^1 : \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{int}dm(t) = 0, n \geq 0\right\}$), la dualité étant donnée par

$$< [f]\,, h >= \int_0^{2\pi} f(e^{it})h(e^{it})dm(t), \qquad f \in L^1, \qquad h \in H^\infty.$$

Rappelons également qu'une suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ de $\mathbb{D}$ est une suite de Blaschke si elle vérifie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |\alpha_k|) < +\infty \text{ (condition de Blaschke).}$$

Dans ce cas, le produit

$$b(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{\alpha_k}}{|\alpha_k|} \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha_k} z}$$

converge dans $\mathbb{D}$ (avec la convention $\overline{\alpha_k}/|\alpha_k| = 1$ si $\alpha_k = 0$). La fonction b, appelée produit de Blaschke associé à la suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$, appartient à l'espace de Hardy H^∞ ($|b(e^{it})| = 1$ m-presque partout) et ses zéros sont précisément les points α_k. On dit qu'une suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ de $\mathbb{D}$ est une suite d'interpolation si l'application $h \to (h(\alpha_k))_{k\geq 0}$ est une surjection de H^∞ sur l'espace des suites complexes bornées l_∞.

Lorsque $T \in PB(H)$ est absolument continu (notation $T \in PB_{abs}(H)$), il existe un homomorphisme Φ_T de l'algèbre H^∞ dans l'algèbre duale $A_T = \overline{\mathbb{C}\,[T]}^{w^*}$ engendrée par T, qui vérifie les propriétés suivantes :

1) $\Phi_T(p) = p(T)$ pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}\,[X]$;

2) $\|\Phi_T(h)\| \leq M_T \|h\|_\infty$ pour tout $h \in H^\infty$;

3) Il existe une application linéaire injective et bornée $\varphi_T : Q_T = B_1(H)/\left({}^\perp A_T\right) \to L^1/H_0^1$ telle que $\Phi_T = \varphi_T^*$.

L'application Φ_T correspond au calcul fonctionnel de B. Sz.-Nagy et C. Foias, lorsque T est une contraction absolument continue (voir par exemple [26]), qui a été étendu au cas des opérateurs absolument continus de $PB(H)$ par W. Mlak

[23]. Si x et y sont deux vecteurs de H, et si l'on pose $(x \otimes y)(a) =< a \mid y > x$ pour tout $a \in H$, la classe $[x \otimes y]$ de l'opérateur de rang un $x \otimes y$ est envoyée par φ_T vers un élément de L^1/H_0^1 que nous noterons $x \overset{T}{\square} y$ (notation usuelle dans le cas des contractions absolument continues). Une étude des algèbres duales engendrées par les opérateurs polynomialement bornés a débuté avec les travaux de W. S. Li et C. Pearcy [21, 22]. Pour un acompte très récent sur le sujet, on pourra aussi consulter [18].

Nous présentons maintenant l'analogue, pour les opérateurs de $PB(H)$, de la classification des contractions proposée dans [3]. Soient m, n deux nombres cardinaux tels que $1 \leq m, n \leq \aleph_0$; on dit qu'un opérateur T appartient à la classe $\mathbb{A}_{m,n}$ si tout système de la forme

$$(1.3) \qquad [L_{i,j}] = [x_i \otimes y_j] , \qquad 0 \leq i < m, 0 \leq j < n,$$

où $([L_{i,j}])_{0 \leq i < m, 0 \leq j < n}$ est une matrice à coefficients dans le prédual Q_T, admet une solution $\{x_i : 0 \leq i < m\} \cup \{y_j : 0 \leq j < n\}$ constituée de vecteurs de H. On dira que $T \in \mathbb{A}_{m,n}(r)$ (pour un réel $r \geq 1$) si pour tout $s > r$ le système précédent peut être résolu avec des vecteurs satisfaisant les conditions suivantes

$$\|x_i\|^2 \leq s^2 \sum_{0 \leq j < n} \|[L_{i,j}]\| , \qquad 0 \leq i < m,$$

et

$$\|y_j\|^2 \leq s^2 \sum_{0 \leq i < m} \|[L_{i,j}]\| , \qquad 0 \leq j < n.$$

Pour tout réel $M \geq 1$, en suivant [22], on désigne par $\mathbb{A}^M$ la classe des opérateurs polynomialement bornés absolument continus pour lesquels Φ_T est un isomorphisme de H^∞ sur $\mathbb{A}_T$ tel que $\|\Phi_T\| = M$ et $\left\|\Phi_T^{-1}\right\| = 1$. Dans ce cas, on sait que Φ_T est aussi un homéomorphisme de H^∞ sur $\mathbb{A}_T$ pour les topologies faibles. En utilisant un cas particulier de l'extension du théorème d'Apostol qui est donnée dans [12], on voit que si $T \in PB(H)$ a un spectre qui contient le cercle unité, alors T admet un sous espace hyperinvariant ou bien il appartient à la classe $\mathbb{A}^{M_T}$, ce qui illustre bien l'importance de ces classes. Signalons également que la classe $\mathbb{A}^1$ est l'ensemble des contractions pour lesquelles le calcul fonctionnel de B. Sz.-Nagy et C. Foias est isométrique (c.a.d. Φ_T est une isométrie) et que la notation usuelle est alors $\mathbb{A}$. Si T est une contraction absolument continue, on peut voir que pour tout couple $(x, y) \in H \times H$, il existe une unique fonction $x \overset{T}{\cdot} y$ de L^1 dont les coefficients de Fourier satisfont

$$(1.4) \qquad \left(x \overset{T}{\cdot} y\right)^\wedge (n) = \begin{cases} < T^{*n}x \mid y > & \text{si} \quad n \geq 0 \\ < T^{-n}x \mid y > & \text{si} \quad n < 0. \end{cases}$$

Dans le cadre des contractions absolument continues $T \in \mathbb{A}_{\aleph_0,\aleph_0} \supseteq \mathbb{A} \cap \mathbb{C}_{0,0}$, on sait (d'après [14], ou d'après [4, 5] compte tenu des remarques du paragraphe 5 de [14]) que pour toute matrice infinie $(f_{i,j})_{i,j \geq 0}$ d'éléments de L^1, il existe deux suites $(x_i)_{i \geq 0}$ et $(y_j)_{j \geq 0}$ de vecteurs de H telles que $f_{i,j} = x_i \overset{T}{\cdot} y_j$ pour tout couple d'entiers (i,j), et que pour toute fonction positive $f \in L^1 - \{0\}$ qui est semi continue inférieurement (notation sci), il existe $x \in H$ tel que $f = x \overset{T}{\cdot} x$. La situation se complique si l'on quitte la classe $\mathbb{A}_{\aleph_0,\aleph_0}$. Par exemple pour le shift usuel S sur H^2, on voit que $f = x \overset{S}{\cdot} x$ si et seulement si $\ln|f|$ est intégrable. Dans cet article nous nous intéressons aux factorisations des classes de fonctions positives sci dans L^1/H_0^1 sous la forme $x \overset{T}{\square} x$ pour des opérateurs $T \in PB_{abs}(H)$ qui appartiennent à $\mathbb{A}_{1,1}$ ou bien à $\mathbb{A}_{1,\aleph_0} \cup \mathbb{A}_{\aleph_0,1}$. Les points de départ des techniques qui nous ont permis d'établir ces résultats se trouvent de façon plus ou moins implicite dans [11, 28]. On en déduit ensuite des résultats de factorisation spatiale pour des fonctions positives sci sous la forme $x \overset{T}{\cdot} x$, avec $x \in H$, lorsque T est une contraction appartenant à la classe $\mathbb{A}$ ou à la classe $(\mathbb{A} \cap C_{0,.}) \cup (\mathbb{A} \cap C_{.,0})$.

2. Compressions quasi-diagonalisables.

On dit qu'un opérateur $D \in B(H)$ est quasi-diagonalisable s'il existe un système biorthogonal complet (e_k, e^l) dans lequel sa matrice infinie est diagonale, ce qui revient à dire que l'on a $< De_k \mid e^l >= 0$ lorsque $k \neq l$. Le théorème suivant, qui éclaircit la situation relativement à l'existence de compressions quasi-diagonalisables, va jouer un rôle crucial pour les nouvelles factorisations que nous allons obtenir. Rappelons qu'un opérateur $T \in B(H)$ dilate un opérateur R agissant sur un sous espace fermé E de H, si pour tout entier n on a

$$R^n = P_E T^n \mid E$$

où P_E désigne la projection orthogonale sur le sous espace E. Si A et B sont deux opérateurs de $B(H)$, on définit la constante de similarité $C(A,B)$ en posant $C(A,B) = inf\left\{\|X\|\left\|X^{-1}\right\|; X \in GL(H) \text{ et } A = XBX^{-1}\right\}$, en faisant la convention que $C(A,B) = +\infty$ si A et B ne sont pas similaires.

Théorème 2.1. *Soit T un opérateur polynomialement borné absolument continu qui appartient à la classe $\mathbb{A}_{1,1}$, et soit$(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de Blaschke de points distincts du disque unité ouvert $\mathbb{D}$. Alors l'opérateur T admet une compression quasi-diagonalisable R dont le spectre $\sigma(R)$ est le compact $\overline{\{\alpha_k; k \geq 0\}}$, de sorte que $\sigma(R) \cap \mathbb{D} = \{\alpha_k; k \geq 0\}$. Lorsque $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ est une suite d'interpolation, l'opérateur T dilate un opérateur R, dont le spectre $\sigma(R)$ est le compact $\overline{\{\alpha_k; k \geq 0\}}$, qui est similaire à un opérateur normal diagonal N, avec une constante de similarité vérifiant l'inégalité $C(R,N) \leq M_{pb}(T)^2\Delta^2$, où Δ est la constante d'interpolation associée à la suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$. Dans ce dernier cas, l'algèbre duale $\mathcal{A}_R$ est isomorphe à l'algèbre l_∞ des suites complexes bornées.*

Preuve. Considérons la fonction φ de $L^1(\mathbb{T})$ définie par $\varphi(t) = e^{it}\overline{b(e^{it})}$ Comme $T \in \mathbb{A}_{1,1}$, il existe $x, y \in H$ tel que $[\varphi] = \left[x \overset{T}{\square} y\right]$ dans $L^1(\mathbb{T})/H_0^1$. Il en découle que

$$(2.1) \qquad < h(T)x \mid y >=< x \overset{T}{\square} y, h >= \int_0^{2\pi} h(e^{it})e^{it}\overline{b(e^{it})}dm(t)$$

pour toute fonction $h \in H^\infty$. On introduit le sous espace fermé $E = \vee_{n\geq 0}T^n x$ engendré par les images de x par les itérés de T. On a évidemment $E \in Lat(T)$ et par conséquent la restriction $\widetilde{T}$ de T à E appartient à $B(E)$. Quitte à remplacer y par sa projection orthogonale sur E, on peut supposer dans la suite que y appartient à E.

On considère maintenant le produit de Blaschke b associé à la suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$. Pour tout entier l on note par b_l le produit de Blaschke associée à la suite $(\alpha_k)_{k\neq l}$ et on pose $u_l(z) = b_l(z)/b_l(\alpha_l)$. On introduit les sous espaces $F_1 = \vee_{n\geq 0}\widetilde{T}^{*n}y$ et $F_0 = E \ominus F_1$. On définit alors l'opérateur $R \in B(F_1)$ en posant $R = P_{F_1}T \mid F_1 = P_{F_1}\widetilde{T} \mid F_1$. Par construction, R est une compression de T et il s'ensuit que $b(R) = 0$. Comme $b(R)^*y = 0$, on remarque que le vecteur $u_l(R)^*y$ est un vecteur propre de l'opérateur R^* associé à la valeur propre $\overline{\alpha_l}$. Il est non nul car $< x \mid u_l(R)^*y >=< u_l(T)x \mid y >= -\overline{\alpha_l}/\left|\alpha_l\right| \neq 0$ d'après (2.1). On pose $e^k = u_k(\widetilde{T})^*y/\left\|u_k(\widetilde{T})^*y\right\|$ et $e_k = u_k(R)e^k$ pour tout entier k. On a le résultat suivant.

Lemme 2.2. *Les suites* $\left((e_k)_{k\geq 0}, (e^k)_{k\geq 0}\right)$ *constituent un système biorthogonal complet de* F_1.

Pour effectuer la preuve du lemme 2.2, nous utiliserons le résultat intermédiaire suivant. Ce dernier se prouve facilement en considérant la dualité entre les espaces L^1/H^1_0 et H^∞, puis en appliquant le théorème des frères Riesz et le théorème de factorisation des fonctions de H^1 (voir par exemple [21]).

Lemme 2.3. *L'espace de Hardy* H^∞ *est la fermeture faible du sous espace* $\mathcal{F}$ *donné par*

$$\mathcal{F} = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k u_k + bg; n \in \mathbb{N}, (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n \text{ et } \ g \in H^\infty\right\}.$$

Preuve du lemme 2.2. On commence par remarquer que pour tout couple (k, l) d'entiers, on a $< e_k \mid e^l >=< e^k \mid u_k(R)^*e^l >= u_k(\alpha_l) < e^k, e^l >= \delta_{k,l}$, ce qui montre déjà que les suites $(e_k)_{k\geq 0}$ et $(e^k)_{k\geq 0}$ forment un système biorthogonal.

En appliquant le lemme 2.3 et en utilisant la continuité faible du calcul fonctionnel H^∞ pour les opérateurs polynomialement bornés, on voit que pour tout entier p on a

$$(2.2) \qquad y = \lim_{m\to+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n_m} a_k(m)u_k(R)^*y + g_m(R)^*b(R)^*y\right]$$

où les $a_k(m)$ appartiennent à $\mathbb{C}$ et les fonctions g_m sont dans H^∞. Comme $b(R)^*y = 0$, on en déduit que y est faiblement adhérent à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs e^n et par conséquent que $y \in \vee_{n\geq 0}e^n \in Lat(R^*)$.

Le vecteur y étant cyclique pour R^*, il en résulte que $F_1 = \vee_{n\geq 0} e^n$. De la même manière, en appliquant le lemme 2.3, en utilisant les égalités $b(R) = 0$ et $e_k = u_k(R)e^k$, on en déduit que $e^l \in \vee_{n\geq 0} e_n$ pour tout entier l. Ceci entraine que $F_1 = \vee_{n\geq 0} e_n$ et termine la preuve du lemme 2.2.

Fin de la preuve du théorème 2.1. On commence par remarquer que le lemme 2.2 et l'analyse précédente permettent d'affirmer que l'opérateur R est quasi-diagonalisable (ce que l'on écrit symboliquement sous la forme $R \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k e_k \otimes e^k$). Il est clair que $K = \overline{\{\alpha_k ; k \geq 0\}} \subseteq \sigma(R) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{D}} \backslash K$. Le produit de Blaschke b se prolonge analytiquement au voisinage de λ (voir [20] p. 68) et par suite on peut écrire b sous la forme $b = b(\lambda) + (z - \lambda)f$ avec $f \in H^\infty$. Comme R est un opérateur polynomialement borné absolument continu (car T dilate R), le calcul fonctionnel H^∞ nous donne

$$0 = b(R) = b(\lambda)I + (R - \lambda I)f(R). \tag{2.3}$$

Or $|b(\lambda)| = 1$ si λ appartient au cercle unité, et $b(\lambda)$ est également non nul si $|\lambda| < 1$, ce qui implique dans les deux cas d'après (2.3) que $\lambda \notin \sigma(R)$.

Supposons maintenant que la suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ est une suite d'interpolation du disque unité ouvert, et soit $c = \inf_{k\geq 0} |b_k(\alpha_k)|$ la constante de Carleson associée à la suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$, qui est strictement positive [10]. L'application $h \in H^\infty \to (h(\alpha_k))_{k\geq 0}$ est alors une application surjective de H^∞ sur l^∞, et pour tout $u \in l^\infty$ il existe $h \in H^\infty$ telle que $h(\alpha_k) = u_k$ pour $k \geq 0$, avec $\|h\|_\infty \leq \Delta$, où Δ est la "constante d'interpolation" associée à la suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ (on a $\Delta \leq \frac{c_0}{c}(1 - \ln c)$, où c_0 est une constante universelle). On peut alors associer à toute partie G de $\mathbb{N}$ une fonction $h_G \in H^\infty$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{c} h_G\,(\alpha_k) = 1_G(k), \\ \|h_G\|_\infty \leq \Delta. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Posons $L(\{\alpha_k\}_{k\in G}) = h_G(R)$, de sorte que $\left\|L(\{\alpha_k\}_{k\in G})\right\| \leq M_{pb} \left\|\Delta\right\|_\infty$. En appliquant l'opérateur d'interpolation a la fonction $1 - 2.1_G$, on voit que l'on a aussi

$$(2.5)\ \left\|I - 2L(\{\alpha_k\}_{k\in G})\right\| \leq M_{pb} \left\|\Delta\right\|_\infty .$$

Par un procédé d'extension standard, on étend L en une mesure spectrale (non orthogonale en général) sur $\sigma(R)$. Il résulte d'une application classique du théorème du point fixe de Markov (voir [17], p. 1945-1947, lemmes XV.6.1 et XV.6.2) que cette mesure spectrale est similaire à une mesure spectrale orthogonale $\widetilde{L}$. Plus précisément il existe un opérateur autoadjoint B à inverse borné tel que BRB^{-1} coincide avec l'opérateur normal $N := \int_{\sigma(R)} z d\widetilde{L}(z)$, et on a $\frac{\|x\|^2}{C^2} \leq \|B(x)\|^2 \leq C^2 \|x\|^2$ pour tout x, où $C = sup_G \|1 - 2h_G(R)\|$. Il résulte alors de (2.5) que $C(R, N) \leq C^2 \leq M_{pb}^2 \|\Delta\|_\infty^2$. Enfin, comme N est diagonal, il est clair que l'algèbre duale $\mathcal{A}_R$ est isomorphe à l'algèbre l^∞ des suites complexes bornées. $\square$

3. Factorisation.

Nous sommes maintenant en mesure donner un premier résultat de factorisation. Ce résultat montre l'importance des suites de Blaschke pour la factorisation spatiale relativement à la plus grande classe $\mathbb{A}_{1,1}$. Rappelons que le noyau de Poisson en un point α de $\mathbb{D}$ est défini par $P_\alpha(z) = (1 - |\alpha|^2)\,|1 - \overline{\alpha} z|^{-2}$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Théorème 3.1. *Soit T un opérateur polynomialement borné absolument continu qui appartient à la classe $\mathbb{A}_{1,1}$, et soit $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de Blaschke du disque unité ouvert $\mathbb{D}$. Alors pour toute suite $(a_k)_{k\geq 0} \in l^1(\mathbb{R})$ de réels positifs, il existe $x \in H$ tel que l'on ait*

$$x \overset{T}{\square} x = \left[\sum_{k=1}^{+\infty} a_k P_{\alpha_k} \right].$$

Preuve. Le théorème 2.1 nous permet d'assurer l'existence d'un sous espace fermé F de H, d' un système biorthogonal complet $\left\{ (e_k)_{k\geq 0}, \left(e^k\right)_{k\geq 0} \right\}$ de F et d'un opérateur quasi-diagonalisable $R \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k e_k \otimes e^k \in B(F)$ qui est dilaté par T. Soit $p \geq 1$ un entier, on note P_p la projection orthogonale sur le sous espace F_p engendré par les vecteurs $e_1, ..., e_p$. En appliquant le théorème 2.2 de [28] à l'opérateur $R_p = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e_k \otimes (P_p e^k)$ qui agit sur le sous espace de dimension finie F_p, on en déduit qu'il existe un vecteur x_p de F_p tel que

$\mathrm{x}_p \overset{R_p}{\square} x_p = \sum_{k=1}^{p} (a_k/\|e_k\|^2) e_k \overset{R_p}{\square} e_k = \sum_{k=1}^{p} a_k e_k \overset{R_p}{\square} (P_p e^k)$.

Comme l'opérateur $e_k \otimes (P_p e^k)$ appartient à l'algèbre duale engendrée par R_p, on peut utiliser l'égalité précédente pour calculer $< [x_p \otimes x_p], e_l \otimes (P_p e^l) >$ et on obtient

$$(3.1) \qquad < x_p \mid e^k >< e_k \mid x_p >=< x_p \mid P_p e^k >< e_k \mid x_p >= a_k$$

pour tout $k \in \{0, ..., p\}$. On observe que cette dernière propriété entraine que $\|x_p\|^2 = \sum_{k=1}^{p} < x_p \mid P_p e^k >< e_k \mid x_p >= \sum_{k=1}^{p} a_k$.

Comme la suite $(x_p)_{p\geq 0}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite $(x_{p_i})_{i\geq 0}$ qui converge faiblement vers $x \in H$. On déduit immédiatement de (3.1) que pour tout entier k on a

$$(3.2) \qquad < x \mid e_k >< e^k \mid x >= a_k.$$

Considérons une fonction ψ donnée par $\psi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u_k(z) + b(z) g(z)$ où la suite de nombres complexes $(b_k)_{k\geq 0}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls et où $g \in H^\infty$. D'après (3.2), il vient

$$
\begin{aligned}
< \quad x \overset{T}{\square} x, \psi >&=< \left[\sum_{k=0}^{+\infty} b_k u_k(R) + b(R)g(R) \right] x \mid x > \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k < u_k(R)x \mid x >= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u_k(\alpha_k) b_k =< \left[\sum_{k=1}^{+\infty} a_k P_{\alpha_k} \right], \psi > .
\end{aligned}
$$

On déduit alors par densité du lemme 2.3 que $x \overset{T}{\square} x = \left[\sum_{k=1}^{+\infty} a_k P_{\alpha_k} \right]$, ce qui achève la démonstration du théorème. □

Remarques: 1) On pouvait aussi construire la suite de vecteurs $(x_p)_{p\geq 0}$ en utilisant un procédé analogue à celui développé dans [11].
2) Le théorème 3.1 conduit naturellement à la question suivante : Est-ce que la classe des fonctions de $L^1(\mathbb{T})$ qui sont un mélange positif de noyaux de Poisson associés à une suite de Blaschke est la plus grande possible pour une factorisation du type $x \overset{T}{\square} x$ pour l'ensemble des opérateurs polynomialement bornés appartenant à la classe $\mathbb{A}_{1,1}$?

Corollaire 3.2. *Soit T une contraction absolument continue qui appartient à la classe $\mathbb{A}$, et soit $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de Blaschke d'éléments de $\mathbb{D}$. Alors pour toute suite $(a_k)_{k\geq 0} \in l^1(\mathbb{R})$ de réels positifs, il existe $x \in H$ tel que l'on ait*

$$
x \overset{T}{\cdot} x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k P_{\alpha_k}.
$$

Preuve. On sait que $T \in \mathbb{A}_{1,1}$ d'après [2,15]. En appliquant le théorème précédent, on en déduit qu'il existe $x \in H$ tel que $x \overset{T}{\square} x = \left[\sum_{k=1}^{+\infty} a_k P_{\alpha_k} \right]$. Or nous avons $x \overset{T}{\square} x = \left[x \overset{T}{\cdot} x \right]$, et par conséquent la fonction $x \overset{T}{\cdot} x - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k P_{\alpha_k}$ appartient à H_0^1. Cette fonction étant positive, elle est nécessairement nulle.

Nous allons voir que la propriété $T \in \mathbb{A}_{\aleph_0,1}(r)$ va nous permettre d'abandonner la condition que $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ est une suite de Blaschke, tout en factorisant quand même une large classe de fonctions positives semi-continues inférieurement. Nous avons en effet le résultat suivant

Théorème 3.3. *Soit T un opérateur polynomialement borné absolument continu qui appartient à la classe $A_{\aleph_0,1}(r)$ pour un certain réel $r \geq 1$. Si $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ est une suite d' éléments du disque unité ouvert et $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{k\geq 0} a_k \ln(1/\varepsilon_k) < +\infty$ pour une suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ de réels positifs telle que $\sum_{k\geq 0} \varepsilon_k < +\infty$, alors il existe $x \in H$ tel que l'on ait*

$$
x \overset{T}{\square} x = \left[\sum_{k=1}^{+\infty} a_k P_{\alpha_k} \right].
$$

Preuve. Comme $\sum_{k\geq 0}\varepsilon_k \left\|[P_{\alpha_k}]\right\|_{L^1/H_0^1}=\sum_{k\geq 0}\varepsilon_k \left\|[P_{\alpha_k}]\right\|_{L^1}=\sum_{k\geq 0}\epsilon_k<+\infty$ et comme $T\in A_{\aleph_0,1}(r)$, on sait qu'il existe une suite bornée $(x_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de H et $y\in H$ tels que

$$\left[x_n \overset{T}{\square} y\right]=\varepsilon_n\left[P_{\alpha_n}\right] \tag{3.4}$$

pour tout entier n. On considère le sous espace fermé $E=\vee_{n,p\geq 0}T^p x_n\in Lat(T)$ et on note $\widetilde{T}$ la restriction de T à E. On peut supposer dans la suite que $y\in E$. Posons $G=\vee_{p\geq 0}\widetilde{T}^{*p}y\in Lat(\widetilde{T}^*)$ et $F=E\ominus G\in Lat(\widetilde{T})\subseteq Lat(T)$. Il résulte de (3.4) que $\left(\widetilde{T}-\alpha_n I_E\right)x_n=(T-\alpha_n I_H)\,x_n\in G^\perp$ pour tout entier n. Soit $x_n=u_n+v_n$ la décomposition de x_n suivant la somme directe orthogonale $E=F\oplus G$. Si on note $R=P_G T P_G=P_G\widetilde{T}P_G$, on voit que T dilate R par construction et il résulte de ce qui précède que $Rv_n=\alpha_n v_n$ pour tout entier n. De plus, on a $sup_{n\geq 0}\left\|v_n\right\|\leq sup_{n\geq 0}\left\|x_n\right\|=M<+\infty$. On pose $w_n=v_n/\left\|v_n\right\|$ et on observe que

$$\begin{aligned}
<\ w_n\mid y> &= \frac{1}{\|v_n\|}<v_n\mid y>=\frac{1}{\|v_n\|}<x_n\mid y> \\
&= \frac{1}{\|v_n\|}<x_n \overset{T}{\cdot} y,1>=\frac{1}{\|v_n\|}\int_0^{2\pi}\varepsilon_n P_{\alpha_n}(e^{it})dm(t)=\frac{\varepsilon_n}{\|v_n\|}\geq\frac{\varepsilon_n}{M}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

On introduit maintenant la fonction φ définie sur G par

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \|x\|^2-\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\ln\left(|<x\mid w_k>|^2\right) \\
&= \left[\|x\|^2+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\ln^-\left(|<x\mid w_k>|^2\right)\right]-\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\ln^+\left(|<x\mid w_k>|^2\right).
\end{aligned}$$

D'une part, pour tout entier N on a

$$\sum_{k=1}^{N}a_k\ln^+\left(|<x\mid w_k>|^2\right)\leq\left[\sum_{k=1}^{N}a_k\right]\ln^+\left(\|x\|^2\right),$$

ce qui garantit la convergence normale sur toute partie bornée de G. La fonction $x\rightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\ln^+\left(|<x\mid w_k>|^2\right)$ est donc faiblement continue sur tout borné de H. D'autre part les fonctions $x\rightarrow\|x\|^2$ et $x\rightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\ln^-\left(|<x\mid w_k>|^2\right)$ sont w^* sci sur toute partie bornée comme bornes supérieures de fonctions w^* sci . Il en résulte que φ est elle même w^* sci sur toute partie bornée de G.

Par ailleurs, on remarque que $\lim_{\|x\|\rightarrow+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

En effet, on a

$$\varphi(x)\geq\|x\|^2-2\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right]\ln^+\left(\|x\|\right).$$

Il existe donc $M > \|y\|$ tel que $\varphi(x) \geq \varphi(y) + 1$ lorsque $\|x\| > M$.

Comme φ est w^* sci sur la boule fermée B de rayon M centrée à l'origine, elle admet un minimum sur B en un point $x \in B$ qui est en fait un minimum absolu de φ .

Soit k un entier fixé et soit $z \in \mathbb{C}$. 0n pose

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(x + zR^{*k}x) = \|x\|^2 + z < R^{*k}x \mid x > + \overline{z} < x \mid R^{*k}x > + |z|^2 \left\|R^{*k}x\right\|^2 \\ &\quad - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ln\left(|< x \mid w_n >|^2\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ln\left|1 + z\overline{\alpha_n}^k\right|^2 . \end{aligned}$$

Avec une détermination convenable du logarithme complexe, on obtient $\ln\left|1 + z\overline{\alpha_n}^k\right|^2 = \ln\left[1 + z\overline{\alpha_n}^k\right] + \ln\left[1 + \overline{z}\alpha_n^k\right]$. Il en résulte que

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(0) = < R^{*k}x \mid x > - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\overline{\alpha_n}^k = < x \mid T^k x > - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\overline{\alpha_n}^k.$$

Si ψ est un représentant de la classe $x \overset{T}{\square} x$, on voit que les fonctions ψ et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k P_{\alpha_k}$ ont les mêmes coefficients de Fourier positifs, ce qui implique l'égalité $\left[x \overset{T}{\square} x\right] = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k P_{\alpha_k}\right]$. Ceci termine la preuve du théorème 3.3. $\square$

Corollaire 3.4. *Soit T une contraction qui appartient à la classe $A_{\aleph_0,1}(r)$, et soit $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{D}$. Si $(a_n)_{n\geq 0}$ une une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ln(n+1) < +\infty$, alors il existe un vecteur x de H tel que*

$$x \overset{T}{\cdot} x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k P_{\alpha_k}.$$

Preuve. On raisonne comme pour la preuve du corollaire 3.2, mais en utilisant le théorème précédent.

Il résulte de [16] que toute contraction de la classe $T \in \mathbb{A} \cap C_{0,.}$ (une telle contraction est automatiquement absolument continue) appartient à la classe $\mathbb{A}_{\aleph_0,1}(4\sqrt{3})$, et on a évidemment la même propriété si $T \in \mathbb{A} \cap C_{.,0}$. Donc le corollaire 3.4 est valable pour ce type de contractions, qui contient en particulier toutes les contractions T de classe $C_{0,.} \cup C_{.,0}$ dont le spectre est dominant dans le disque unité (ce qui signifie que tout point du cercle unité est limite non-tangentielle de points du spectre de T).

Remarque : On rappelle que T est une ρ-contraction ($\rho > 0$) si elle admet une ρ-dilation unitaire au sens de Nagy et Foias [24]. Une 1 -contraction est exactement une contraction usuelle, c'est le résultat de B. Sz. Nagy [24]. D'un autre côté, un théorème de C. A. Berger [6] nous dit qu' une 2-contraction est exactement un opérateur dont l'image numérique est incluse dans le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$. Par ailleurs, si T est une ρ-contraction (voir [13] pour plus de détails), on sait que pour tout couple $(x, y) \in H \times H$, il existe une unique fonction $x \overset{T}{\cdot} y$ de L^1 qui satisfait (1.4). Bien que les fonctions $x \overset{T}{\cdot} x$ ne soient plus nécessairement positives m presque partout lorsque $\rho \neq 1$, il est intéressant de noter que l'on est quand même en mesure de factoriser autant de fonctions positives que dans le cas des contractions ($\rho = 1$). En effet, les corollaires 3.2 et 3.4 restent vrais si l'on remplace l'hypothèse "T est une contraction" par " T est une ρ-contraction". En particulier, en utilisant le résultat principal de [25] et le fait que la classe $\mathbb{A}_{1,1}$ est invariante par similarité, on voit que le corollaire 3.4 s'applique aux ρ-contractions appartenant à une des classes $\big(\mathbb{A}^M \cap C_{0,\cdot}\big)$ $\cup \big(\mathbb{A}^M \cap C_{\cdot,0}\big)$.

Remerciements : 1) Ces résultats ont été exposés à l'université de Lille 1, à l'Université de Timisoara et au congrès de Rabat d'avril 2006, et nous tenons à remercier les organisateurs du congrès de Rabat et les universités de Lille 1 et de Timisoara pour leurs invitations.

2) Nous remercions le referee pour ses suggestions qui nous ont aidé à raccourcir sensiblement certaines démonstrations.

Bibliographie

1. C. Ambrozie and V. Müller, *Invariant subspaces for polynomially bounded operators*, J. Funct. Anal. 213 (2004), 321-345.
2. H. Bercovici, *Factorization theorems and the structure of operators on Hilbert pace*, Ann. of Math., 128 (1987), 399-413.
3. H. Bercovici, C. Foias, C. Pearcy, *Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory*, CBMS Regional Conference Series, 56, A. M. S., Providence, R. I. 1985.
4. H. Bercovici, C. Foias, C. Pearcy, *Factoring trace-class operator-valued functions with applications to the class $\mathbb{A}_{\aleph_0}$*, J. Operator Theory 14 (1985), 351-389.
5. H. Bercovici, C. Foias, C. Pearcy, *Two Banach space methods and dual operator algebras*, J. Funct. Anal. 78 (1988), 306-345.
6. C. A. Berger, *A strange dilation theorem*, Notices American Math. Soc., 12 (1965), 590.
7. F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical ranges II*, Cambridge University Press, 1973.
8. S. Brown, *Some invariant subspaces for subnormal operators*, Integral Equations and Operator Theory 1 (1978), 310-333.
9. S. Brown, B. Chevreau and C. Pearcy, *On the structure of contraction operators. II*, J. Funct. Anal. 76 (1988), 30-57.
10. L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math., 80, 921-930.

11. G. Cassier, *Sur la classification de H. Bercovici, C. Foias et C. Pearcy concernant les algèbres duales*, J. Funct. Anal. 80 (1988), 371-382.
12. G. Cassier, *Ensembles K-spectraux et algèbres duales d'opérateurs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sr. I Math. 311 (1990), no. 4, 219-222.
13. G. Cassier, *Generalized Toeplitz operators, restrictions to invariant subspaces and similarity problems*, J. Operator Theory 53 (2005), 45-89.
14. I. Chalendar and J. Esterle, *L^1 factorization for $C_{0,0}$ contractions with isometric functional Calculus*, J. Funct. Anal. 154 (1998), 174-194.
15. B. Chevreau, *Sur les contractions à calcul fonctionnel isométrique. II*, J. Operator Theory, 20 (1988), 269-293.
16. B. Chevreau, G. Exner and C. Pearcy, *On the structure of contraction operators. III*, Michigan Math. J., 36 (1989), 29-62.
17. N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators (Part III), Wiley-Interscience, New York, 1962.
18. G. Exner, Y. S. Jo and I. B. Jung, *Dilation for polynomially bounded operators*, J. Korean Math. Soc., 42 No. 5 (2005), 893-912. 29-62.
19. J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York, 1964.
20. K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
21. W. S. Li, *On polynomially bounded operators. I*, Houston Journal of Mathematics, 18 No. 1 (1992), 73-96.
22. W. S. Li and C. Pearcy, *On polynomially bounded operators. II*, Houston Journal of Mathematics, 21 No. 4 (1995), 719-733.
23. W. Mlak, *Decompositions and extensions of operator valued representations of function algebras*, Acta Sci. Math. (Szeged), 30 (1969), 181-193.
24. B. Sz. Nagy, *Sur les contractions de l'espace de Hilbert*, Acta. Sci. Math. (1954), 87-92.
25. B. Sz. Nagy, *Similitude des opérateurs de la classe C_ρ à des contractions*, C. R. Acad. Sci. Paris 264, Sr. A (1967), 1063-1065.
26. B. Sz. Nagy and C. Foias, Analyse harmonique des opérateurs sur l'espace de Hilbert, Masson, Budapest 1967.
27. G. Pisier, *A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction*, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997), 351-369.
28. D. Westwood, *On C_{00}-contractions with dominating spectrum*, J. Funct. Anal. 66 (1986), 96-104.

Gilles CASSIER, Université de Lyon, Lyon, F-69003, France ; Université Lyon 1, Institut Camille Jordan, Villeurbanne cedex, F-69622, France ; CNRS, UMR5208.

Jean ESTERLE, IMB, UMR 5251, Université Bordeaux 1, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.

E-mails: Gilles.Cassier@math.univ-lyon1.fr, Jean.Esterle@math.u-bordeaux1.fr