

Question 1 Calculer, si elle existe, l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Question 2 Le but de cet exercice est d'étudier la diagonalisation de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Écrire le polynôme caractéristique de A , $p_A(x) = \det(A - xI_2)$.
- Vérifier que les valeurs propres de A sont $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{1, 2\}$.
- Trouver un vecteur propre v_{λ_1} de valeur propre λ_1
(Rappel : c'est une solution non nulle de $(A - \lambda_1 I_2)X = 0$).
- Trouver un vecteur propre v_{λ_2} de valeur propre λ_2 .
- Donner une matrice P telle que $P^{-1}AP =: \Delta$ soit une matrice diagonale. Expliciter la matrice Δ (sans justifications). Donner l'inverse P^{-1} de P .

Question 3

- Donner la formule d'intégration par parties, puis calculer

$$\int_1^2 1 \cdot \ln(x) dx.$$

- Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction

$$f(x) = \sin(1 + x^2)$$

- En déduire

$$\int_0^1 x \sin(1 + x^2) dx$$

- En effectuant un changement de variable $\sin(x) = u$, calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^{3/2}} dx$$

Question 4 Soit $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$.

- Déterminer le développement de Taylor(-Young) d'ordre 2 de f au point $x_0 = 0$.
- Déduire la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1 - x}{x^2}$$

FIN.