MOSE contrôle 1, corrigé

Ex. 1.

$$\left\{\begin{array}{l} x + z = -1 \\ 2x - y + z = 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}-2\mathrm{I} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \boxed{x} + z = -1 \\ \boxed{-y} - z = 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -1 - z \\ y = -2 - z \end{array}\right. \quad \text{équations}$$

2 pivots, 1 var. libre z $\Rightarrow$ ~~dim~~ l'ens. des solution a dim $= 1$ $\Rightarrow$ droite.

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \ (\text{paramètre}) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{point}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{direction}} \quad \text{droite}$$

Ex. 2.

A est 2×4, B est 3×2.

Donc AB non défini, BA défini et BA est 3×4 :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ex. 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{r} \mathrm{II} \\ -\mathrm{I} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(gauche : } \mathbb{1}_3\text{, droite : } A^{-1}\text{)}$$

A est inversible, et A^{-1} est à droite dans le dernier tableau.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

N.B. (Vous voyez que vérifier aide à détecter de très probables erreurs de calculs!)