

Exercice 1 Le but de cet exercice est de diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Écrivez le polynôme caractéristique de A , $p_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_2)$.
2. déterminez les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A .
3. dites si A est effectivement diagonalisable, et écrivez la forme diagonale Δ de A .
4. déterminez un vecteur propre v_{λ_1} de valeur propre λ_1 (c.-à-d. une solution non nulle de $(A - \lambda_1\mathbb{I}_2)X = 0$).
5. déterminez un vecteur propre v_{λ_2} de valeur propre λ_2 .
6. déterminez une matrice P telle que $P^{-1}AP = \Delta$.
7. vérifiez que $P^{-1}AP$ est bien égal à Δ .

Exercice 2 Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = 5 \sin(3x) \ln(4x + 1), \quad g(x) = e^{\arctan x}$$

Exercice 3 Énoncez la règle d'intégration par parties, et calculez

$$\int_0^2 2(x+1)e^x dx$$

Exercice 4 Calculez avec un changement de variable

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \arctan x dx \text{ (posez } \arctan x = t)$$

Exercice 5 Calculez

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$$

(*Indication* : d'abord par changement de variable $\sqrt{x} = t$, et ensuite par parties.)