Exercice 1 Étant donnée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on commence par écrire son polynôme caractéristique

$$p_A(x) = \det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 - x - 2.$$

Les racines de $p_A(x)$, à savoir $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$, sont les valeurs propres de A.
Puisque les valeurs propres sont réelles et distinctes, la matrice est bien diagonalisable, et sa forme diagonale est

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maintenant il faut déterminer un vecteur propre pour λ_1 et un vecteur propre pour λ_2 : pour λ_1, il faut trouver une solution (*non nulle, les vecteurs propres étant par définition* $\neq 0$) du système

$$(A - \lambda_1 I_2)v = 0,$$

cad

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0,$$

(Rappel : une équation est toujours multiple de l'autre, car $\det(A - \lambda_1 I_2) = 0$), ce qui donne par ex. $v_{\lambda_1} = (1, -1)$.
Pour λ_2, il faut trouver une solution non nulle du système

$$(A - \lambda_2 I_2)v = 0,$$

cad

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + 2y = 0,$$

ce qui donne par ex. $v_{\lambda_2} = (2, 1)$.
On écrit tout de suite la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

qui a les deux vecteurs propres trouvés en colonne, et on sait que $P^{-1}AP = \Delta$. On peut le vérifier directement, il nous reste à calculer P^{-1} :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Pour f, dérivée du produit :

$$f'(x) = 5[\cos(3x) \cdot 3 \cdot \ln(4x+1) + \sin(3x) \cdot \frac{1}{4x+1} \cdot 4]$$

Pour g, dérivée de la fonction composée :

$$g'(x) = e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 3 Pour l'énoncé, voir les notes de cours. On a

$$\begin{aligned}\int_0^2 2(x+1)e^x\,dx &= [e^x \cdot 2(x+1)]_0^2 - \int_0^2 e^x \cdot 2\,dx \\ &= e^2 \cdot 2 \cdot 3 - e^0 \cdot 2 - 2[e^x]_0^2 \\ &= 6e^2 - 2 - 2(e^2-1) = 4e^2\end{aligned}$$

Exercice 4

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \arctan x\,dx &= \int_{t=0}^{t=\pi/4} \frac{1}{1+(\tan t)^2} \cdot t \cdot (1+(\tan t)^2)\,dt \\ &\text{chang. var. } \arctan x = t,\ x = \tan t,\ dx = (1+(\tan t)^2)dt \\ &= \int_0^{\pi/4} t\,dt = [\frac{t^2}{2}]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})^2 - 0 = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})^2\end{aligned}$$

Exercice 5

$$\begin{aligned}\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int_{t=1}^{t=2} e^t \cdot 2t\,dt \quad \text{chang. var. } \sqrt{x} = t,\ x = t^2,\ dx = 2t\,dt \\ &= [e^t \cdot 2t]_1^2 - \int_1^2 e^t \cdot 2dt \quad \text{par parties} \\ &= 4e^2 - 2e - [2e^t]_1^2 = 4e^2 - 2e^2 - (2e^2 - 2e) = 2e^2\end{aligned}$$