Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie par $f(x,y) = x^3 - 3xy + 2y^2$.

i) Calculez les dérivées partielles $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ de f.

ii) Déterminez les points critiques de f.

iii) Calculez les dérivées partielles secondes de f.

iv) Dites, pour chaque point critique de f, s'il s'agit d'un point de maximum, minimum ou point selle.

Exercice 2 Calculez l'intégrale

$$\int_D (x \cos y + 2)\, dxdy$$

où $D = [0,2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. (*Indication :* c'est la somme de l'intégrale du terme $x \cos y$ et de l'intégrale du terme 2.)

Exercice 3 Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$ty'(t) + y(t) - t^2 = 0 \tag{E}$$

définie pour $t \in [1, +\infty[$.

i) Écrivez (E) sous la forme $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$.

ii) Déterminez l'équation homogène (E_0) associée à (E).

iii) Déterminez la solution générale y_h de (E_0).

iv) Calculez une solution particulière y_p de (E).

v) Donnez la solution générale y de (E).

vi) Enfin, déterminez la solution du problème de Cauchy associé à (E) avec la condition initiale $y(1) = 0$.

Exercice 4 Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 2 \tag{E}$$

i) Déterminez l'équation homogène (E_0) associée à (E).

ii) Déterminez l'équation caractéristique de (E_0) et calculez ses solutions.

iii) Déterminez la solution générale y_h de (E_0).

iv) Calculez une solution particulière y_p de (E). (*Indication* : posez $y_p(t) = A$, A constante à déterminer).

v) Donnez la solution générale y de (E).

vi) Enfin, déterminez la solution du problème de Cauchy associé à (E) avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.