Ex. 10 systèmes à 3 inconnues — 16/09/2013

Matrices

Def. Matrice : tableau de nombres réels, à m lignes et n colonnes

ou matrice $m \times n$.

$$\text{m lignes}\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

n colonnes

On écrit $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n}$

a_{ij} = élément ~~de~~ situé en ligne i colonne j.

les lignes de A sont $(a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}), \ldots, (a_{m1}\ a_{m2}\ \cdots\ a_{mn})$

les colonnes de A sont $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

la diagonale principale de A est $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{\min(m,n),\min(m,n)})$

si $m = n$, la matrice est dite carrée $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

si $m = 1$, $A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$ est un vecteur ligne

si $n = 1$, $A = v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne.

Une matrice carrée est diagonale si

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

quand si $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$

On écrit aussi $A = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$

~~Ex~~ Si A diagonale et $d_1 = \cdots = d_n = d$ $\Rightarrow$ A matrice scalaire

$$A = \begin{pmatrix} d & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(d, \ldots, d)$$

Matrice identité :

$$\mathbb{1}_n = \mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

$$= \mathrm{Diag}(1, \dots, 1)$$

Opérations sur les matrices
- Addition
- Multiplication par un scalaire (= nombre)
- Produit de deux matrices.

Addition A $m\times n$ mêmes dimensions

B $m\times n$

l'addition se fait composante par composante

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

l'element neutre est la matrice 0, dont tous les coeff. sont nuls.

Multiplication par scalaire : $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ex. 1, 2.

Produit "lignes par colonnes", produit matriciel

(multiplication terme à terme est très peu utilisée)

A $m\times n$ B $n\times p$

AB $m\times p$

le produit est possible si nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B.

Règle : $(m\times n)(n\times p) = m\times p$

si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$

alors $AB = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le p}}$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

Recette : le terme de place (i,j) est le produit de la ligne i de A avec la colonne j de B.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \text{ est } (3\times 2)$$

3×4 $\qquad$ 4×2

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} \text{ etc.}$$
$$= (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0$$
$$= 1 + 0 + 1 + 0 = 2$$

Par contre, BA n'est pas possible.

Remarque : Si AB existe, BA peut ne pas exister, et même s'il existe, en général $AB \neq BA$. (taille différente mais aussi avec même taille)

Ex. 3, 5.

Relation Matrices - Systèmes :

A (Ex. 6 (i))
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ x + 3y + 2z = -1 \\ 3x + 5y + 8z = 8 \end{cases}$$
peut s'écrire
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (*)$$

en général
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$AX = b$$

Pour les TP avec Scilab, et en gén sur les ordinateurs, les systèmes sont tjrs vus en forme matricielles.

système en forme matricielle ou
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

résolution de (*) et de Ex. 6 qqs-uns.

Inverse des matrices :

Rappel : $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. l'inverse de a est a^{-1}, t.q. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} a = 1$.

ex. $5 \neq 0 \Rightarrow 5^{-1} = \frac{1}{5}$ t.q. $5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$.

Def. A matrice $n \times n$ (carrée). A inversible si $\exists\, B$ t.q.

$AB = BA = \mathbb{1}_n$. B est l'inverse de A.

Si B existe, alors elle est unique, et s'écrit A^{-1}.

Proposition : Équivalentes ; pour A $n \times n$:

i) A inversible

ii) $x \in \mathbb{R}^n$, si $A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$ (vecteurs)

¿ Comment calculer l'inverse, si elle existe ?

Matrices 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Def. Déterminant de A : $\det A = |A| = ad - bc$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$-$ $+$

Prop. A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ et dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

en effet ; $A \cdot \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$

Ex. 8

Matrices 3×3
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Def. Déterminant de A :

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

formule de Sarrus

$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$
$- a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$.

Prop. A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Méthode pour le calcul de l'inverse (valable en dimension n quelconque) Pivot de Gauss

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}}_{D} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbb{1}_3}\right) \xrightarrow[\text{sur les lignes.}]{\text{mêmes opérations}} \cdots \Longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \quad \Big\} D^{-1}\right)$$

- si on ne peut transformer D en $\mathbb{1}$, $k_\bullet$ alors D n'est pas inversible
- sinon, quand à gauche il y a $\mathbb{1}$, à droite on trouve D^{-1}.

justification : opérations sur les lignes de $D \longleftrightarrow TD$

$$(D \mid \mathbb{1}) \rightsquigarrow (\underline{T_k T_{k-1} \cdots T_1} D \mid T_k T_{k-1} \cdots T_1) = (\mathbb{1} \mid T_k T_{k-1} \cdots T_1)$$

alors $(T_k T_{k-1} \cdots T_1) D = \mathbb{1}$ c-à-d $T_k T_{k-1} \cdots T_1 = D^{-1}$ $\square$

Ex. 8, 9, 10.