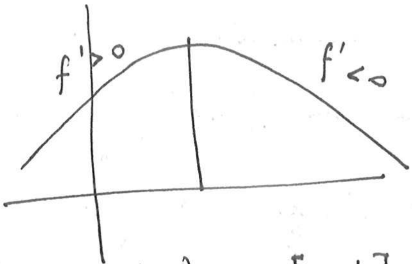
Compléments sur les ~~dérivées~~ continuité et les dérivées

07/10/2013

Feuille 1

1. Croissance et décroissance

f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors



i) f croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$ si $\forall x \in]a,b[$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).

ii) Si f vérifie $\forall x \in]a,b[$ $f'(x) > 0$ (resp. $\forall x \in]a,b[$ $f'(x) < 0$) alors f est strict. croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$.

iii) Si $f'(x) = 0$ $\forall x \in]a,b[$ alors f est constante sur $[a,b]$.

Ex. 5.

2. Négligeabilité

3. Comparaison des croissances

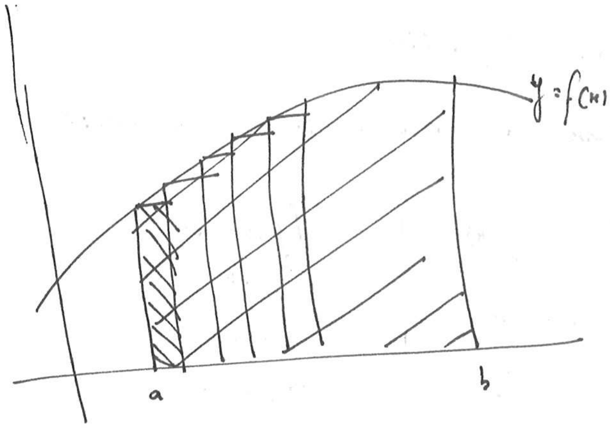
4. Règle de l'Hôpital Ex. 7.

Intégration

f continue sur $[a,b]$, positive

$\int_a^b f(x)\,dx =$ "aire sous la courbe"

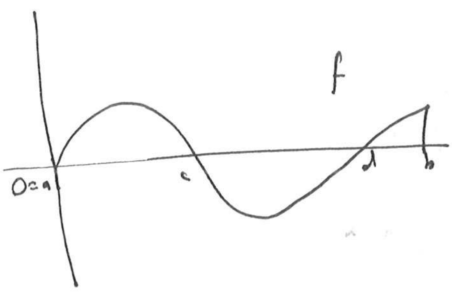
: lui "aire de fonctions à escalier"

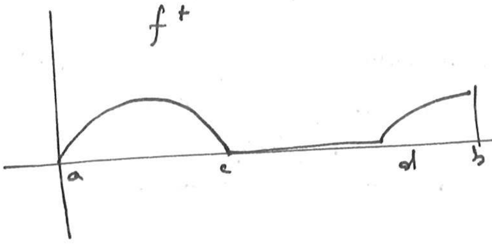


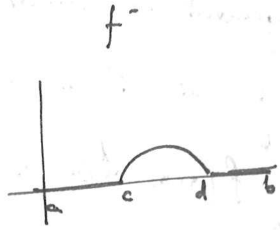
f non positive : alors

$f = f^+ - f^-$ $\quad f^+(x) = \sup(f(x), 0)$ $\quad f^-(x) = \sup(-f(x), 0)$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx$ "aire avec signe"





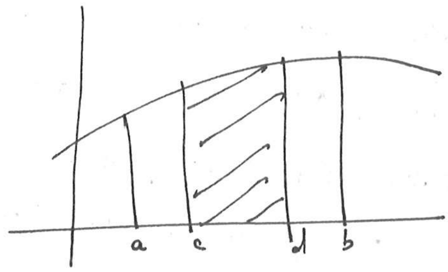


Définition f, F définies : $]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

F primitive de f sur I si F dérivables et $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Théorème fondamental du calcul intégral

f continue sur $]a,b[$, $\quad a<c<d<b$



i. Soit $F : \underset{\substack{\Uparrow \\ I}}{x} \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

alors $F'(x) = f(x)$, et $F(a) = 0$

(F est la primitive de f qui s'annule en a)

ii. Soit G une primitive de f sur I. Alors $\boxed{\int_c^d f(x)\,dx = G(d) - G(c)}$

conclusion : intégration et dérivation sont opérations réciproques.

Propriété de l'intégrale :
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int f + \int g \qquad \int \lambda f = \lambda \int f$$
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad \forall c \in]a,b[$$
$$\text{si } a<b \Rightarrow \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Calcul des primitives

$\int f(x)\,dx$ = calculer toutes les primitives : $F(x) + \underset{\hookrightarrow}{C}$ constante d'intégration

exemples	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\alpha \neq -1$	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
	$\frac{1}{x}$	$\log\|x\| + C$
	e^x	$e^x + C$
	$\sin x$	$-\cos x + C$
	$\cos x$	$\sin x + C$

ex. 1.

changement de variables : Si $\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$

alors si F est une primitive de f, ~~$\forall f\alpha g$~~

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \left[F(g(x))\right]_{x=a}^{x=b} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$$

(**).

ex. 2, 5, 6, 7, méthode directe et inverse.

Intégration par parties

$u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables en $]a,b[$ avec dérivée continue

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt$$

Démo. $\displaystyle\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt + \int_a^b uv'\,dt = \int_a^b (u'v + uv')\,dt = \int_a^b (uv)'\,dt = \Big[uv\Big]_a^b$.

Attention : 1. Question de cours aux DS.

2. Il y a un seul "prime" de chaque côté de $=$.

3. Le "prime" change de u à v.

Ex. 4 et les autres.

Démo du chang. de variables :

si $F'(x) = f(x)$ alors

$$\Big(F(g(x))\Big)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

donc $\int_a^b$ partout $\rightarrow$

$$\int_{x=a}^{x=b} \Big(F(g(x))\Big)'\,dx = \int_{x=a}^{x=b} F'(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

$$\Big[F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b} = \Big[F(u)\Big]_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} F'(u)\,du = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$$

Ex. méthode directe : on voit déjà $g'(x)$.

$$\int_{x=1}^{2} \underbrace{2x}_{g'(x)} \sin(\underbrace{x^2}_{g(x)})\,dx = \int_{u=g(1)}^{u=g(2)} \sin u\,du = \int_1^4 \sin u\,du = \Big[-\cos u\Big]_1^4 = -\cos 4 + \cos 1$$

Ex méthode inverse : on ne voit pas $g'(x)$, on la fait apparaître :

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3+x}}$$ $\sqrt{3+x} = t$ etc.