ELEMENTS D'ALGEBRE LINEAIRE,

A L'USAGE DES ETUDIANTS DE L'U.E. M1PY3W01

FASCICULE DE COURS

Les pages qui suivent contiennent une présentation des principaux résultats utiles .
Elles s'adressent à l'étudiant dont l'objectif est seulement de les assimiler rapidement et d'apprendre à les appliquer .
C'est pourquoi la plupart des preuves ont été omises au bénéfice d'exemples mettant en œuvre les notions abordées.

A partir de Septembre 2014, le programme de cette U.E. devient le programme d'Algèbre et application à la résolution de systèmes différentiels linéaires, tel qu'enseigné jusque là , en semestre 4.

Jean-Louis Artigue , le 3 Septembre 2014

TABLE DES MATIERES

Page

ELEMENTS D'ALGEBRE LINEAIRE

ELEMENTS D'ALGEBRE LINEAIRE

-I- ESPACES VECTORIELS -

-1) La structure d'espace vectoriel -

Deux exemples :

	$(\mathbb{R}^2, +, .)$ couples de réels	$(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, .)$ applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Définition de $+$:	$\forall((x, y), (x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$	$\forall(f, g) \in (\mathcal{F}(\mathbb{R}))^2$, $[x \to f(x)] + [x \to g(x)] = [x \to f(x) + g(x)]$
Définition de $.$:	$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\lambda.(x, y) = (\lambda \times x, \lambda \times y)$	$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $\lambda.[x \to f(x)] = [x \to \lambda \times f(x)]$
Propriétés de $+$:		
. Associativité	$\forall((x, y), (x',y'), (x'',y'')) \in (\mathbb{R}^2)^3$, $((x, y) + (x', y')) + (x'', y'') = (x, y) + ((x', y') + (x'', y''))$	$\forall(f, g, h) \in (\mathcal{F}(\mathbb{R}))^3$, $([x \to f(x)] + [x \to g(x)]) + [x \to h(x)] = [x \to f(x)] + ([x \to g(x)] + [x \to h(x)])$
. Existence d'un Neutre :	$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(0, 0) + (x, y) = (x, y) + (0, 0) = (x, y)$	$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $([x \to 0] + [x \to f(x)]) = [x \to f(x)] + [x \to 0] = [x \to f(x)]$
. Existence pour tout élément d'un Symétrique:	$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y) = (0, 0)$	$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \exists f' \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $[x \to f(x)] + [x \to f'(x)] = [x \to f'(x)] + [x \to f(x)] = [x \to 0]$
Propriétés de $.$:		
. Pseudo-Asociativité	$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda \times \mu).(x, y) = \lambda.(\mu.(x, y))$	$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $(\lambda \times \mu).[x \to f(x)] = \lambda.(\mu.[x \to f(x)])$
. propriété avec 1 :	$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $1.(x, y) = (x, y)$	$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $1.[x \to f(x)] = [x \to f(x)]$
Propriétés de liaison :		
. Pseudo-Distributivité :	$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda + \mu).(x, y) = \lambda.(x, y) + \mu.(x, y)$	$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $(\lambda + \mu).[x \to f(x)] = \lambda.[x \to f(x)] + \mu.[x \to f(x)]$
. Distributivité :	$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall((x, y), (x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\lambda.((x, y) + (x', y')) = \lambda.(x, y) + \lambda.(x',y')$	$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall(f, g) \in (\mathcal{F}(\mathbb{R}))^2$, $\lambda.([x \to f(x)] + [x \to g(x)]) = \lambda.[x \to f(x)] + \lambda.[x \to g(x)]$

"**$\mathbb{K}$- espace vectoriel**" ou "**espace vectoriel sur $\mathbb{K}$**" (en abrégé $\mathbb{K}$-ev.):

$(\mathbb{K}, +, \times)$ étant un corps commutatif (usuellement $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), c'est tout triplet **$(E, +, .)$** tel que E soit un ensemble non vide muni de deux opérations (une loi de composition interne + et une loi de composition externe **.**), vérifiant les 7 propriétés ci-dessus .

$\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$, ensemble des vecteurs du plan en a été le premier exemple d'où le qualificatif "vectoriel".

Quelques espaces vectoriels supposés connus :

$(\mathcal{V}_{\mathcal{P}}, +, .)$ où $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ est l'ensemble des vecteurs du plan et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$.

$(\mathbb{R}^n, +, .)$ où **$\mathbb{R}^n$** est l'ensemble des n-uplets de réels et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$.

$(\mathbb{C}^n, +, .)$ où **$\mathbb{C}^n$** est l'ensemble des n-uplets de complexes et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

. **$(\mathbb{R}[X], +, .)$** où **$\mathbb{R}[X]$** est l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'indéterminée X et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$.

$(\mathbb{C}[X], +, .)$ où **$\mathbb{C}[X]$** est l'ensemble des polynômes à coefficients complexes d'indéterminée X et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, .)$ où $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$.

Vocabulaire élémentaire : **(E, + , .)** étant un $\mathbb{K}$-ev. ,

Vecteur : élément de E .

Vecteur nul : le vecteur 0_E élément neutre de E pour l'addition . (par exemple $0_{\mathbb{R}^2} = (0 , 0)$).

Vecteur –u : le vecteur opposé du vecteur u . (par exemple $-(1 , 2) = (-1 , -2)$) .

Scalaire : élément de $\mathbb{K}$.

Combinaison linéaire des vecteurs $u_1 , u_2 , \dots , u_n$: tout vecteur $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .u_i$.

Propriétés des $\mathbb{K}$-ev. :

$\boxed{1}$ L'addition est commutative .

$\boxed{2}$ $\forall u\in E$, $0.u = 0_E$ et $(-1).u = -u$.

$\boxed{3}$ $\forall \lambda\in \mathbb{K}$, $\forall u\in E$, $\lambda .u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0_E$.

-2) Sous-espaces vectoriels -

Sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel : (E, + , .) étant un $\mathbb{K}$-ev. et F une partie non vide de E, on peut faire agir sur les éléments de F les opérations + et **.** de (E, + , .).

Si (F, + , .) est lui aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on le qualifie de "sous-espace vectoriel de (E, + , .).

Remarques : (E, + , .) et ($\{0_E\}$, + , .) sont deux sous-espaces vectoriels triviaux de (E, + , .) ;

les autres sous $\mathbb{K}$-ev. de (E, + , .) sont appelés "sous-espaces vectoriels propres" .

$0_F = 0_E$ et l'opposé –u d'un vecteur u de F est son opposé –u au sens de E .

Caractérisation simplifiée des sous-espaces vectoriels : (E, + , .) étant un $\mathbb{K}$-ev. et F une partie de E ,

(F, + , .) est un sous $\mathbb{K}$-ev. de (E, + , .) $\Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \varnothing \\ F \text{ \textit{est stable par combinaison linéaire de 2 vecteurs :}} \\ \forall(u , v)\in F^2, \forall(\lambda , \mu)\in \mathbb{K}^2 , \lambda .u + \mu .v \in F \end{cases}$

Exemple : $(\Delta , + , .)$ est un sous $\mathbb{K}$-ev. de $(\mathbb{R}^2, + , .)$ où $\Delta = \{(x , x)/ x\in \mathbb{R}\}$

$(0 , 0)\in \Delta$ donc $\Delta \neq \varnothing$

et $\forall(u , v)\in \Delta^2$, notant $u = (x , x)$ et $v = (y , y)$, $\forall(\lambda , \mu)\in \mathbb{K}^2$,

$\lambda . u + \mu . v = \lambda . (x , x) + \mu . (y , y) = (\lambda x + \mu y , \lambda x + \mu y)$ qui est bien élément de Δ.

Conseil : Pour savoir si $F \neq \varnothing$, examiner si 0_E est élément de F .

Si oui, on a prouvé que $F \neq \varnothing$, si non (F, + , .) ne peut être sous $\mathbb{K}$-ev. de (E, + , .) .

Effet des opérations ensemblistes sur les sous-espaces vectoriels :

(E, + , .) étant un $\mathbb{K}$-ev. , (F, + , .) et (G, + , .) en étant deux sous-$\mathbb{K}$-ev. ,

$\boxed{1}$ ($F\cup G$, + , .) n'est un sous $\mathbb{K}$-ev. de (E, + , .) que si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

$\boxed{2}$ ($F\cap G$, + , .) est toujours un sous $\mathbb{K}$-ev. de (E, + , .).

$\boxed{3}$ ($\complement_E F$, + , .) n'est jamais un sous $\mathbb{K}$-ev. de (E, + , .) puisque $0_E \notin \complement_E F$.

Sous-espace vectoriel *Vect*(A) engendré par une partie non vide A de E :

L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A est le plus petit (pour l'inclusion) sous-$\mathbb{K}$-ev. de (E, + , .) qui contient A ; c'est aussi l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de (E, + , .) qui contiennent A .

Exemples : Dans $(\mathbb{R}^2, +, .)$, $\mathcal{Vect}(\{(1\,,1)\}) = \{\lambda.(1\,,1)/\lambda\in\mathbb{R}\} = \Delta$.

Dans $(\mathbb{R}[X], +, .)$, $\mathcal{Vect}(\{1\,,X\,,X^2\}) = \{a + bX + cX^2/(a\,,b\,,c)\in\mathbb{R}^3\}$ noté $\mathbb{R}_2[X]$.

Somme de deux sous-espaces vectoriels :

$(E, +, .)$ étant un $\mathbb{K}$-ev. , $(F, +, .)$ et $(G, +, .)$ en étant deux sous-$\mathbb{K}$-ev. , $F + G = \mathcal{Vect}(\{F\cup G\})$.

Ecriture de ses éléments (qui justifie la notation F+G):

Les combinaisons linéaires d'éléments de $F\cup G$ se ramènent à des sommes $u + v$ où $u\in F$ et $v\in G$.

Sous-espaces vectoriels **supplémentaires** :

$(E, +, .)$ étant un $\mathbb{K}$-ev. , $(F, +, .)$ et $(G, +, .)$ en étant deux sous-$\mathbb{K}$-ev. ,
F et G sont "supplémentaires" lorsque $F\cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

Notation : Lorsque $F\cap G = \{0_E\}$ la **somme F+G est qualifiée de "directe"** et s'écrit $F\oplus G$.
Ainsi lorsque F et G sont "supplémentaires" , $F\oplus G = E$.

Exemple : Dans $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$, $F = \mathcal{Vect}(\{1\,,X\}) = \{a + bX/(a\,,b)\in\mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}_1[X]$
et $G = \mathcal{Vect}(\{X^2\}) = \{cX^2/c\in\mathbb{R}\}$ sont supplémentaires
puisque $F\cap G = \{0\}$ et $F+G = \mathcal{Vect}(F\cup G) = \mathcal{Vect}(\{1\,,X\,,X^2\}) = \mathbb{R}_2[X]$.

On admettra que ces notions s'étendent à tout nombre fini de sous-$\mathbb{K}$-ev. supérieur à 2 .

-3) Familles génératrices, familles libres, bases .

Famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-ev. $(E, +, .)$: C'est toute suite $(e_i)_{i\in I}$ (I étant une section commençante de $\mathbb{N}$)
formée de vecteurs de E non nuls et telle que $\mathcal{Vect}(\{e_i/\ i\in I\}) = E$.

Exemples : $\mathcal{Vect}(\{(1\,,0)\,,(1\,,1)\,,(0\,,1)\}) = \mathcal{Vect}(\{(1\,,0),(0\,,1)\}) = \mathbb{R}^2$
donc $(e_i)_{i\in\{1,2,3\}}$ où $e_1 = (1\,,0)$, $e_2 = (1\,,1)$ et $e_3 = (0\,,1)$, est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

$\forall i\in\mathbb{N}$, notons $P_i = X^i$; $\mathcal{Vect}(\{P_i\ /\ i\in\mathbb{N}\}) = \mathbb{R}[X]$ puisque $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

Intérêt d'une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-ev. $(E, +, .)$:
Permettre d'exprimer tout vecteur u de E comme combinaison linéaire de vecteurs de cette famille.

Remarques : Pour certains espaces vectoriels , on ne sait pas trouver de famille génératrice (exemple: $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, .)$).

Pour certains on en trouve mais avec une infinité de vecteurs (exemple : $(\mathbb{R}[X], +, .)$) ,
Pour d'autres, avec un nombre fini de vecteurs (exemple : $(\mathbb{R}^2, +, .)$).

Famille libre dans un $\mathbb{K}$-ev. $(E, +, .)$: C'est toute suite $(\varepsilon_j)_{j\in J}$ (J étant une section commençante de $\mathbb{N}$)
formée de vecteurs non nuls tels que pour toute famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires éléments de $\mathbb{K}$,

$$\left[\sum_{j\in J}\lambda_j\,.\,\varepsilon_j = 0_E\right] \Rightarrow \left[\forall j\in J, \lambda_j = 0\right].$$

Famille de vecteurs de E "liée" : famille $(\varepsilon_j)_{j\in J}$ de vecteurs non nuls de E qui n'est pas libre.
Au-delà du fait que l'on puisse trouver une famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires non tous nuls tels que

$\sum_{j\in J}\lambda_j\,.\,\varepsilon_j = 0_E$, cela signifie qu'au moins un des ε_j peut s'exprimer en fonction de certains autres.

Exemples : Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1 + X$ et $\varepsilon_3 = 1 + X + X^2$ constituent une famille libre mais si on leur adjoint $\varepsilon_4 = 1 + X^2$, la nouvelle famille est liée puisque $\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1$.

Intérêt d'une famille libre dans un $\mathbb{K}$-ev. $(E, +, .)$: Une famille libre $(\varepsilon_j)_{j\in J}$ étant choisie, certes il n'est pas sûr que tout vecteur de E puisse s'exprimer comme combinaison linéaire de certains des vecteurs de $(\varepsilon_j)_{j\in J}$ mais si un vecteur u de E s'exprime ainsi, alors les coefficients λj de sa décomposition sont uniques.

Base d'un $\mathbb{K}$-ev. $(E, +, .)$: Famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs non nuls de E qui est à la fois libre et génératrice de E. Elle allie les intérêts des deux notions puisque tout vecteur u de E peut se décomposer sous la forme

$u = \sum_{i\in I} x_i . e_i$, la suite des scalaires $(x_i)_{i\in I}$ étant unique pour ce vecteur u et appelée suite des "coordonnées" de u relativement à la base $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$.

Exemples : $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in\{1,2\}}$ où $e_1 = (1 , 0)$ et $e_2 = (0 , 1)$ est la base "canonique" de $(\mathbb{R}^2, + , .)$.

$\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{i\in\{1,2\}}$ où $\varepsilon_1 = (1 , 1)$ et $\varepsilon_2 = (1 , -1)$ est une autre base du même $(\mathbb{R}^2, + , .)$.

Le vecteur $(-1 , 3) = -1.e_1 + 3.e_2$ a pour coordonnées -1 et 3 par rapport à $\mathcal{B}$

mais puisque $(-1 , 3) = 1.\varepsilon_1 - 2.\varepsilon_2$, ses coordonnées sont 1 et -2 par rapport à $\mathcal{B}'$.

Quelques résultats à connaître :

$\boxed{1}$ Pour certains espaces vectoriels, on ne sait en trouver une base ($(\mathcal{F}(\mathbb{R}), + , .)$) , pour d'autres, on trouve des bases qui comportent une infinité de vecteurs ($(\mathbb{R}[X] , + , .)$ dont $(X^i)_{i\in N}$ est la base canonique). Certains enfin comme $(\mathbb{R}^2, + , .)$ admettront des bases au nombre d'éléments fini. Ce n'est qu'à eux que nous nous intéresserons maintenant.

$\boxed{2}$ Pour tout $\mathbb{K}$-ev. $(E, + , .)$, s'il admet une famille génératrice finie alors il admet au moins une base. Il admet même une infinité de bases et toutes ses bases ont le même nombre fini de vecteurs. Ce nombre est appelé **la "dimension" de E** et noté dim(E) .Il dépend du choix de $\mathbb{K}$.

$\boxed{3}$ Pour tout $\mathbb{K}$-ev. $(E, + , .)$ de dimension finie ,

si L , B et G sont trois parties non vides de E constituées de vecteurs non nuls et telles que $L \underset{\neq}{\subset} B \underset{\neq}{\subset} G$.

si $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ sont des familles constituées respectivement des vecteurs de L, B et G

et si $\mathcal{B}$ est une base de E ,

alors $\mathcal{L}$ est libre mais non génératrice de E et $\mathcal{G}$ est génératrice de E mais liée.

$\boxed{4}$ Pour tout $\mathbb{K}$-ev. $(E, + , .)$ de dimension finie **n** , toute famille $\mathcal{B}$ constituée de **n** vecteurs non nuls est base de E si et seulement si elle est libre ou génératrice de E.

Sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev. $(E, + , .)$ de dimension finie :

$\boxed{1}$ Si $(F, + , .)$ est un sous-$\mathbb{K}$-ev. de $(E, + , .)$, alors $(F, + , .)$ est de dimension finie et $\dim(F) \le \dim(E)$.

$\boxed{2}$ Si $(F, + , .)$ et $(G, + , .)$ sont deux sous-$\mathbb{K}$-ev. de $(E, + , .)$ tels que $F \subset G$ alors $\dim(F) \le \dim(G)$.

$\boxed{3}$ Si $(F, + , .)$ et $(G, + , .)$ sont deux sous-$\mathbb{K}$-ev. de $(E, + , .)$ tels que $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

La dimension du sous-$\mathbb{K}$-ev. $(\{0_E\}, + , .)$: c'est 0 par convention.

-II- APPLICATIONS LINEAIRES -

-1) La définition :

Application linéaire φ de E dans F : (E, + , .) et (F, + , .) étant deux $\mathbb{K}$-ev. , une application φ de E dans F est dite "linéaire" lorsque $\forall(\lambda , \mu)\in \mathbb{K}^2$, $\forall(u , v)\in E^2$, $\varphi(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.\varphi(u) + \mu.\varphi(v)$.

Exemple et contre-exemple :

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x , y) \to (x + y , x - y , 2x)$ est linéaire mais $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x , y) \to x\times y$ ne l'est pas .

$\mathcal{L}$(E , F) : est l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

$\mathcal{L}$(E) : est $\mathcal{L}$(E , E) .

Cas où le $\mathbb{K}$-ev. (E, + , .) admet une base finie : Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in\{1 , .. , n\}}$ est base de E , alors l'application linéaire φ est parfaitement déterminée par la connaissance des n vecteurs $\varphi(e_i)$.

Exemple : φ est l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même définie sur sa base canonique par :
$\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 1$ et $\varphi(X^2) = 2.X$.
Alors $\forall P\in \mathbb{R}_2[X]$, notant $P = a + b.X + c.X^2$,
$\varphi(P) = \varphi(a.1 + b.X + c.X^2) = a.\varphi(1) + b.\varphi(X) + c.\varphi(X^2) = a.0 + b.1 + c.2.X = b + 2.c.X = P'$, polynôme dérivé .

-2) Noyau, Image et théorème du rang .

Noyau d'une application linéaire φ de $\mathcal{L}$(E , F) :

(E, + , .) et (F, + , .) étant deux $\mathbb{K}$-ev. et φ une application linéaire élément de $\mathcal{L}$(E , F) , le noyau de φ est la partie **Ker(φ)** de E constituée de tous les vecteurs dont l'image par φ est 0_F .
$Ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0_F\})$.

(Ker(φ) , + , .) est toujours un sous-$\mathbb{K}$-ev. de (E, + , .) :

Exemple : $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x , y , z) \to (x - y , y - z)$.

$\forall u\in \mathbb{R}^3$, notant $u = (x , y , z)$,

$$\begin{aligned} u\in Ker(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(u) = 0_{R2} \\ &\Leftrightarrow (x - y , y - z) = (0 , 0) \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ et } y - z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y = z \end{aligned}$$

Ainsi $Ker(\varphi) = \{(x , y , z)\in \mathbb{R}^3 / x = y = z\} = \{(x , x , x) / x\in \mathbb{R}\} = \{x.(1 , 1 , 1) / x\in \mathbb{R}\}$ noté $\mathbb{R}.(1 , 1 , 1)$
"droite vectorielle" (= sous-ev. de dimension 1) de base ((1 , 1 , 1))

Image d'une application linéaire φ de $\mathcal{L}$(E , F) :

(E, + , .) et (F, + , .) étant deux $\mathbb{K}$-ev. et φ une application linéaire élément de $\mathcal{L}$(E , F) , l'image de φ est la partie **Im(φ)** de F constituée de tous les vecteurs -image par φ , c'est-à-dire de tous les φ(u) tels que u∈ E .
$Im(\varphi) = \varphi(E)$.

(Im(φ) , + , .) est toujours un sous-$\mathbb{K}$-ev. de (F, + , .) : Lorsqu'une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in\{1 , .. , n\}}$ de E est connue,
$Im(\varphi) = \mathcal{V}ect(\{\varphi(e_1) , \varphi(e_2) , \dots , \varphi(e_n)\})$.

Exemple : φ : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
$(x , y , z) \to (x - y , y - z)$

$\varphi((1 , 0 , 0)) = (1 , 0)$, $\varphi((0 , 1 , 0)) = (-1 , 1)$ et $\varphi((0 , 0 , 1)) = (0 , -1)$.
donc $\text{Im}(\varphi) = \mathcal{V}ect(\{(1 , 0) , (-1 , 1) , (0 , -1)\}) = \mathcal{V}ect(\{(1 , 0) , (0 , -1)\}) = \mathcal{V}ect(\{(1 , 0) , (0 , 1)\}) = \mathbb{R}^2$.

Le Théorème du Rang :

(E, + , **.**) et (F, + , **.**) étant deux $\mathbb{K}$-ev. et φ une application linéaire élément de $\mathcal{L}(E , F)$,
si E est de dimension finie, alors Ker(φ) et Im(φ) sont des sous-espaces de dimension finie de E et de F
et $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi))$.

Exemple :
On vérifie la conclusion de ce théorème sur l'exemple de φ : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x , y , z) \to (x - y , y - z)$
Puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 1 + 2 = \dim(\mathbb{R}.(1 , 1 , 1)) + \dim(\mathbb{R}^2)$.

Les **morphismes d'espaces vectoriels** :

Dans le tableau ci-dessous figurent quatre noms donnés à une application linéaire φ, élément de $\mathcal{L}(E , F)$
selon que F = E ou non et selon que φ est ou non bijective .
("φ est bijective" = [$\forall v \in F, \exists! u \in E, v = \varphi(u)$] = la relation φ^{-1} est une application) .

	F = E	F $\neq$ E
φ est **bijective**	φ est un **automorphisme** de E	φ est un **isomorphisme** de E sur F
φ est quelconque	φ est un **endomorphisme** de E	φ est un **homomorphisme** de E dans F

Quelques caractérisations des isomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie :

(E, + , **.**) et (F, + , **.**) étant deux $\mathbb{K}$-ev. et φ une application linéaire élément de $\mathcal{L}(E , F)$,
φ est un isomorphisme de E sur F si et seulement si l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée (elles le sont alors toutes).

$\boxed{1}$ φ est bijective, c'est-à-dire que tout vecteur v de F admet un antécédent unique par φ, u dans E .($v = \varphi(u)$).

$\boxed{2}$ $\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ et $\text{Im}(\varphi) = F$.

$\boxed{3}$ $\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F)$.

$\boxed{4}$ $\text{Im}(\varphi) = F$ et $\dim(E) = \dim(F)$.

$\boxed{5}$ Il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in\{1 , .. , n\}}$ de E telle que la famille $\mathcal{B}' = (\varphi(e_i))_{i\in\{1 , .. , n\}}$ soit base de F .

$\boxed{6}$ Toute base $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in\{1 , .. , n\}}$ de E est telle que la famille $\mathcal{B}' = (\varphi(e_i))_{i\in\{1 , .. , n\}}$ soit base de F .

Remarque : On comprendra donc que si deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes,
ils ont même dimension et qu'à l'inverse, si deux tels espaces vectoriels n'ont pas même dimension, ils ne peuvent être isomorphes.

Exemples :

$\boxed{1}$ Inutile de s'interroger sur la bijectivité de φ : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x , y , z) \to (x - y , y - z)$
puisque les espaces de départ et d'arrivée ont des dimensions différentes : 3 et 2 .

Si on ne l'a pas observé, l'obtention d'un noyau égal à $\mathbb{R}.(1 , 1 , 1)$ donc différent de $\{0_{R3}\}$ le prouve également .

$\boxed{2}$ Par contre φ : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x , y) \to (x - y , x + y)$

dont on prouve facilement que le noyau est $\{0_{R2}\}$ est bijective donc automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

-III- MATRICES -

-1) Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), + , .)$:

<u>**Matrice à n lignes et p colonnes**, de coefficients éléments de $\mathbb{K}$:</u>

Tableau rectangulaire de scalaires $A = (a_{i,j})_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$.

<u>$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:</u> L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes , à coefficients dans $\mathbb{K}$.

<u>Matrices égales :</u> Deux matrices de même format $n \times p$, $(a_{i,j})_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p}}$ et $(b_{i,j})_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p}}$, éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, sont dites "égales" lorsque $\forall (i , j) \in [\![1 , n]\!] \times [\![1 , p]\!]$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.

<u>Addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:</u> $\forall (A , B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$, notant $A = (a_{i,j})_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p}}$, on définit la matrice $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p}}$.

<u>Produit par un scalaire dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:</u> $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notant $A = (a_{i,j})_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p}}$ on définit $\lambda.A = (\lambda \times a_{i,j})_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p}}$.

<u>$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), + , .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \times p$.</u>
Son élément neutre pour + est la "matrice nulle $\mathbb{O}$ dont les $n \times p$ coefficients sont nuls .
Toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p}}$ admet une opposée $-A = (-a_{i,j})_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, p}}$.

-2) L'algèbre $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), + , \times , .)$:

<u>$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:</u> C'est $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, cas où p = n et où les matrices sont qualifiées de "carrées".

<u>Matrice **triangulaire supérieure** :</u> Matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $U = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{i,i} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Matrice **diagonale** :

Matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{i,i} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$

Matrice **triangulaire inférieure** : Matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $L = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,i} & 0 & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, notant $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$,

on définit la matrice $A \times B = (c_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}$.

Exemple : Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $A\times B$ et $B\times A$.

On trouve $A\times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \\ -7 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ et $B\times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Il apparaît donc que le produit matriciel n'est pas commutatif.
Ce n'est que pour des cas particuliers de matrices A et B que l'on pourra observer $A\times B = B\times A$.
C'est donc à de tels couples de matrices que l'on devra réserver l'usage de la formule du binome

(basée sur la commutativité du produit) $(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \times B^{n-k}$ où $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Propriétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour le produit matriciel :
La multiplication est Associative.
Elle est Distributive par rapport à l'addition.
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $(\lambda.A)\times B = A\times(\lambda.B) = \lambda.(A\times B)$.
La multiplication n'est pas Commutative .
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet un élément Neutre pour $\times$ appelé "matrice-unité d'ordre n" : $I_n = \mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1)$.
Certaines matrices sont inversibles, d'autres pas .

Détection de l'inversibilité d'une matrice et calcul de son éventuelle inverse à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes :
A l'aide d'une succession bien choisie d'opérations du type $L_i \leftarrow 1.L_i + \lambda.L_j$ ou $L_i \leftarrow \lambda.L_i$, sur ses lignes, toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut être transformée en une matrice triangulaire supérieure U.

Si sur la diagonale descendante de U figure au moins un 0, A n'est pas inversible.
Si sur la diagonale descendante de U ne figure aucun 0, A est inversible et son inverse A^{-1} s'obtient de la manière suivante .

Constituer deux colonnes : celle de gauche a pour en-tête la matrice A , celle de droite la matrice-unité I_n .

Dans la colonne de gauche transformer progressivement A par opérations élémentaires sur ses lignes jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure U.
Simultanément, dans la colonne de droite appliquer les mêmes opérations à partir de la matrice I_n .

Dans la colonne de gauche transformer toujours à l'aide d'opérations élémentaires sur ses lignes, la matrice U en la matrice-unité I_n .Faire subir les mêmes opérations à la matrice de la colonne de droite.

En dernier lieu, lorsque la colonne de gauche est achevée par l'obtention de I_n , la matrice voisine dans la colonne de droite n'est autre que A^{-1}.

<u>Exemple :</u> Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse .

A =	$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$= I_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$	$\begin{matrix} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}$	Aucun 0 sur **diagonale** : A est inversible
$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_3$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}$	
$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}$	
$L_2 \leftarrow - L_2$ $L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}$	$= A^{-1}$

<u>Détection de l'inversibilité d'une matrice et calcul de son éventuelle inverse à l'aide d'un polynôme annulateur de valuation nulle.</u> ("valuation" = degré du terme non nul de plus bas degré)

S'il existe un polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots + a_nX^n$ tel que $a_0 \neq 0$ qui "annule" A,

C'est-à-dire tel que $a_0.I_n + a_1.A + a_2.A^2 + a_3.A^3 + \dots + a_n.A^n = \mathbb{O}$, alors A est inversible et les égalités

$$I_n = A\times\left(\frac{-a_1}{a_0}.I_n + \frac{-a_2}{a_0}.A + \frac{-a_3}{a_0}.A^2 + \dots + \frac{-a_n}{a_0}.A^{n-1}\right) = \left(\frac{-a_1}{a_0}.I_n + \frac{-a_2}{a_0}.A + \frac{-a_3}{a_0}.A^2 + \dots + \frac{-a_n}{a_0}.A^{n-1}\right)\times A$$

font apparaître l'inversibilité de A et la fait que $A^{-1} = \frac{-a_1}{a_0}.I_n + \frac{-a_2}{a_0}.A + \frac{-a_3}{a_0}.A^2 + \dots + \frac{-a_n}{a_0}.A^{n-1}$.

Exemple : Vérifier le fait que $P = -X^3 + 2X^2 + X - 2$ est annulateur de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et calculer A^{-1}.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$P(A) = -A^3 + 2A^2 + A - 2\,I_3 = -\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $-\frac{1}{2}A^3 + A^2 + \frac{1}{2}.A = I_3$ $\quad A \times (-\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}.I_3) = (-\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}.I_3) \times A = I_3$ donc A est inversible

d'inverse $A^{-1} = -\frac{1}{2}A^2 + A + \frac{1}{2}.I_3 = -\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Extension de la définition du produit matriciel au cas de matrices rectangulaires :

A étant une matrice à p colonnes de format $n \times p$ et B une matrice à p lignes de format $p \times q$,

on peut définir $A \times B$ comme la matrice de format $n \times q$: $(c_{i,j})_{\substack{i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, q}}$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,j}$.

Application à la résolution de certains systèmes d'équations linéaires :

Tout système $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$ de n équations linéaires à n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$

est équivalent à l'équation matricielle $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ de la forme $A \times X = B$

qui si A est inversible, se résout en $X = A^{-1} \times B$.

Exemple : Résoudre par cette méthode $\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 = -1 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 1 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 2 \end{cases}$.

On observe que le système est équivalent à l'égalité matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ étant inversible, ceci équivaut à $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

-3) Matrices d'applications linéaires .

$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$: (E, + , .) et (F, + , .) étant deux $\mathbb{K}$-ev. et φ une application linéaire élément de $\mathcal{L}(E , F)$, ayant fait le choix de deux bases $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1,..,p}$ de E et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{i=1,..,n}$ de F , la matrice de φ relativement à ce choix de bases est $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,p}}$ où $a_{i,j}$ est la coordonnée de $\varphi(e_j)$ suivant ε_i .

Pour constituer cette matrice, il suffit donc de juxtaposer les colonnes exprimant les coordonnées des $\varphi(e_j)$ suivant $\mathcal{B}'$.

Exemples :

$\boxed{1}$ $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x , y , z) & \to & (x - y , y - z) \end{array}$,

$\mathcal{B} = (e_j)_{j=1,..,3}$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{i=1,2}$ sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

$\varphi(e_1) = \varphi((1 , 0 , 0)) = (1 , 0) = 1.\varepsilon_1 + 0.\varepsilon_2$;
$\varphi(e_2) = \varphi((0 , 1 , 0)) = (-1 , 1) = -1.\varepsilon_1 + 1.\varepsilon_2$
et $\varphi(e_3) = \varphi((0 , 0 , 1)) = (0 , -1) = 0.\varepsilon_1 -1.\varepsilon_2$. Ainsi, $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ $\varphi = Id_{\mathbb{R}^n}$ identité $u \to u$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = (e_i)_{i=1,..,n}$ base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Parce que $\forall i\in[\![1 , n]\!]$, $\varphi(e_i) = 1.e_i$, la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diag(1 , 1 , … , 1) = I_n .

Attention, si $\mathcal{B}'$ n'est plus égale à $\mathcal{B}$, la matrice de l'identité de $\mathbb{R}^n$, n'est plus I_n .

Liens entre opérations sur les applications linéaires et opérations sur les matrices :

(E, + , .) , (F, + , .) et (G, + , .) étant trois $\mathbb{K}$-ev. de bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.

$\boxed{1}$ $\forall(\lambda , \mu)\in\mathbb{K}^2$, $\forall(\varphi , \psi)\in \big(\mathcal{L}(E , F)\big)^2$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda.\varphi + \mu.\psi) = \lambda.\ \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) + \mu.\ \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\psi)$.

$\boxed{2}$ $\forall\varphi\in\ \mathcal{L}(E , F)$, $\forall\psi\in\ \mathcal{L}(F , G)$, $\psi o\varphi\in\ \mathcal{L}(E , G)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\psi o\varphi) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\psi) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$.

$\boxed{3}$ Si E et F ont même dimension, $\forall\varphi\in\ \mathcal{L}(E , F)$, on a l'équivalence :

[φ est bijective] ⇔ [la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$]

Lorsque l'une de ces deux propositions est vraie, l'autre aussi et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \big(\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\big)^{-1}$.

$\boxed{4}$ $\forall u\in E$, notant $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne de ses coordonnées par rapport à $\mathcal{B}$,

alors la matrice-colonne des coordonnées de φ(u) par rapport à $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

-4) Le changement de base .

Le problème : (E, + , .) et (F, + , .) étant deux $\mathbb{K}$-ev. et φ une application linéaire élément de $\mathcal{L}(E , F)$,
on suppose connue la matrice $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\varphi)$ de φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectives de E et F.
$\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ sont deux nouvelles bases respectivement de E et de F.
On souhaite trouver un moyen rapide de calculer $M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(\varphi)$ en fonction de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\varphi)$.

La méthode : On constitue le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[rrr, "\varphi"] & & & \varphi(u) \arrow[ddd, "Q"] \\
& E_{\mathcal{B}} \arrow[r, "M"'] & F_{\mathcal{B}'} \arrow[d, "Id_F"'] & \\
& E_{\mathcal{B}_1} \arrow[u, "P"'] \arrow[r, "\boldsymbol{\varphi}"] & F_{\mathcal{B}'_1} & \\
u \arrow[uuu, "Id_E"] \arrow[rrr, "\mathbf{M'}"'] & & & \varphi(u)
\end{tikzcd}$$

La relation $\boldsymbol{\varphi} = Id_F \circ \varphi \circ Id_E$ se traduit matriciellement par

$$M' = Q \times M \times P$$

où $\mathbf{P} = \boldsymbol{\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}(Id_E)}$ et $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1}(Id_F)}$

Exemple :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x , y , z) & \to & (x - y , y - z) \end{array} ,$$

$\mathcal{B} = (e_j)_{j=1 , .. , 3}$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{i=1,2}$ sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{B}_1 = (\sigma_j)_{j=1 , .. , 3}$ et $\mathcal{B}'_1 = (\tau_i)_{i=1,2}$ sont les bases $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ définies par
$\sigma_1 = (1 , 1 , 0)$, $\sigma_2 = (1 , 0 , 1)$ et $\sigma_3 = (0 , 1 , 1)$ puis $\tau_1 = (1 , 1)$ et $\tau_2 = (1 , -1)$.

On a déjà exprimé $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}}(Id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On va devoir calculer Q comme matrice inverse de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_1 , \mathcal{B}'}(Id_F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ plus facile à exprimer.

Un calcul rapide conduit à $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(\varphi) = Q \times M \times P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

-IV- DETERMINANTS -

-1) L'application déterminant det $_{\mathcal{B}}$:

Déterminant de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev. $(E, +, .)$ de dimension n : Une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,..,n}$ de E étant choisie,
c'est l'application $\det_{\mathcal{B}}$: $E^n \rightarrow \mathbb{K}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

$$(u_1, \dots, u_n) \rightarrow \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

$\boxed{1}$ elle est linéaire par rapport à chacune de ses n variables

$\boxed{2}$ elle est alternée :
$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, tels que $i \neq j$, l'interversion de u_i et u_j transforme le déterminant en son opposé.
$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = -\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$

$\boxed{3}$ $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Exemple : $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,2}$.
$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, notons $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$.

$\underline{\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2)} = \det_{\mathcal{B}}(x.e_1 + y.e_2, x'.e_1 + y'.e_2) = x.\det_{\mathcal{B}}(e_1, x'.e_1 + y'.e_2) + y.\det_{\mathcal{B}}(e_2, x'.e_1 + y'.e_2)$

$= xx'.\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_1) + xy'.\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) + yx'.\det_{\mathcal{B}}(e_2, e_1) + yy'.\det_{\mathcal{B}}(e_2, e_2)$

$= (xy' - yx').\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2)$ $\underline{= xy' - yx'}$ puisque $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = 1$.

ceci en utilisant le fait que l'échange de e_i et du même e_i fait écrire $\det_{\mathcal{B}}(e_i, e_i) = -\det_{\mathcal{B}}(e_i, e_i) = 0$.

Notation usuelle : Lorsqu'il ne peut y avoir confusion sur la base de référence on ne la mentionne plus
et l'on écrit $\det(u_1, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}$, juxtaposition des matrices-colonnes
des coordonnées de $u_1, u_2, \dots, u_n$ relativement à la base choisie.

Quelques propriétés des déterminants :

$\boxed{1}$ Lorsque deux vecteurs sont égaux (donc deux colonnes sont égales), le déterminant est nul.

$\boxed{2}$ Si l'un des vecteurs est nul (donc une colonne est formée de 0), le déterminant est nul.

$\boxed{3}$ L'échange $C_i \rightleftarrows C_j$ de deux colonnes transforme le déterminant en son opposé.

$\boxed{4}$ Toute opération élémentaire du type $C_i \leftarrow 1.C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j . C_j$ laisse la valeur du déterminant inchangée .

$\boxed{5}$ Si $C_i = \begin{pmatrix} \lambda.x'_{i,1} \\ \lambda.x'_{i,2} \\ \dots \\ \lambda.x'_{i,n} \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} x'_{i,1} \\ x'_{i,2} \\ \dots \\ x'_{i,n} \end{pmatrix} = \lambda.C'_i$ alors $|C_1 \dots \lambda.C'_i \dots C_n| = \lambda.|C_1 \dots C'_i \dots C_n|$.

$\boxed{6}$ Si un même scalaire λ peut se mettre en facteur dans chacune des n colonnes, c'est λ^n qui se factorise devant le déterminant.: $|\lambda.C'_1 \dots \lambda.C'_i \dots \lambda.C'_n| = \lambda^n.|C'_1 \dots C'_i \dots C'_n|$.

Les méthodes usuelles de calcul des déterminants :

La règle de Sarrus : C'est une règle visuelle qui ne s'utilise que sur des déterminants de formats 2×2 ou 3×3 sachant qu'au-delà, le résultat numérique qu'on obtiendrait ne serait plus égal au déterminant.

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - xz'y'' - yx'z'' \,.$$

ceci après avoir recopié les deux premières lignes sous le déterminant .

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1.0.0 + -1.1.(-1) + 1.2.3 - 1.0.(-1) - 1.1.3 - (-1).2.0 = 4 \,.$

Le développement suivant une colonne :

On choisit le plus souvent une colonne qui comporte un nombre important de coefficients nuls car le calcul du déterminant en est d'autant simplifié.

Le développement suivant la colonne $C_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ x_{2,j} \\ \dots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$ est : $\left| C_1 \dots C_j \dots C_n \right| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} x_{i,j} D_{i,j}$

où $D_{i,j}$ est le déterminant de format (n-1)×(n-1) obtenu en "effaçant" la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\left| C_1 \dots C_j \dots C_n \right|$.

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}.2. \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}.0. \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.1. \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

$= -2.(-3) + 0 + (-1).2 = 6 - 2 = 4$ après développement par rapport à la $2^{\text{ème}}$ colonne .

Les **méthodes mixtes** alliant application des opérations élémentaires sur colonnes ou lignes (voir au -2) pourquoi on peut aussi travailler par lignes), et le développement suivant une colonne .

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Somme par ligne = 2 donc $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ *2 en facteur dans* C_1 $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_2$

$$= 2.(-1)^{1+1}.1. \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-2).(-1) = 4 \,.$$

Le déterminant détecteur de bases :

$(u_i)_{i=1,..,n}$ étant une famille de n vecteurs du $\mathbb{K}$-ev. (E, + , .) de dimension n ,

$\boxed{1}$ si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$ par rapport à une base $\mathcal{B}$ de E, il est nul par rapport à toute autre base.

$\boxed{2}$ $[\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0] \Leftrightarrow$ [la famille $(u_i)_{i=1,..,n}$ est liée]

$\boxed{3}$ $[\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0] \Leftrightarrow$ [la famille $(u_i)_{i=1,..,n}$ est libre (donc base de E)]

-2) Le déterminant d'une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Déterminant d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: det(A) est le déterminant de ses vecteurs colonnes exprimés par rapport à la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple : pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$.

Transposée ${}^tA$ d'une matrice A : C'est la matrice ${}^tA = (a_{j,i})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ lorsque $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$.

La 1ère ligne de A a donné la 1ère colonne de ${}^tA$
La 2ème ligne de A a donné la 2ème colonne de ${}^tA$
…
La n^{ème} ligne de A a donné la n^{ème} colonne de ${}^tA$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tA) = \det(A)$.

Conséquences ; Toutes les propriétés des déterminants relatives aux colonnes sont également vraies en termes de lignes. En particulier les opérations élémentaires sont applicables aux lignes et le développement suivant une ligne est possible.

Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure :

Pour chaque déterminant rencontré, on effectue son développement par rapport à sa première colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{i,i} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{i,i} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \dots = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \dots a_{n,n}$$

Le déterminant se réduit au simple produit des coefficients diagonaux.

Déterminant d'une matrice triangulaire inférieure : Egal à celui de sa transposée triangulaire supérieure, c'est encore le produit des coefficients diagonaux.

Déterminant d'une matrice diagonale : Une telle matrice pouvant être considérée comme un cas particulier de matrice triangulaire supérieure, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux.

Ainsi le déterminant de la matrice-unité I_n est-il 1 et celui de $\text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ est-il λ^n (si format $n \times n$) .

Déterminant et produit matriciel :

$\boxed{1}$ $\forall (A , B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$, $\det(A\times B) = \det(A) \times \det(B)$.

$\boxed{2}$ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, [A est inversible] $\Leftrightarrow$ [$\det(A) \neq 0$]

$\boxed{3}$ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

$\boxed{4}$ $\forall (A , B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$, si A et B sont "semblables" , c'est à dire s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P\times B\times P^{-1}$ (ou $B = P^{-1}\times A\times P$), alors $\det(A) = \det(B)$.

Le déterminant détecteur de l'inversibilité d'une matrice carrée :

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'équivalence : [A est inversible] $\Leftrightarrow$ [$\det(A) \neq 0$]

Lorsque $\det(A) \neq 0$, la matrice A^{-1} est donnée par la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . {}^t\mathrm{Cof}(A)$

Où ${}^t\mathrm{Cof}(A)$ est la transposée de la "matrice des cofacteurs" de A $\mathrm{Cof}(A) = \left((-1)^{i+j} D_{i,j}\right)_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n}}$,

$D_{i,j}$ étant le déterminant de format $(n-1)\times(n-1)$ obtenu après "effacement" de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne dans det(A) .

Exemple : Etablir l'inversibilité et calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.1.(-1).1 = -2$$

$\det(A) \neq 0$ donc A est inversible .

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ de transposée } {}^t\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(dans le cas particulier de cet exemple, Cof(A) étant "symétrique", elle est égale à sa transposée)

$$\text{d'où } A^{-1} = \frac{1}{-2} . \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

-V- LA DIAGONALISATION D'UNE MATRICE DIAGONALISABLE -

-1) Valeurs propres et vecteurs propres :

Endomorphisme φ canoniquement associé à une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, φ est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est A .

Exemple : L'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est celui qui transforme

tout (x , y , z) en φ((x , y , z)) dont les coordonnées sont données par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ x+y \\ -x+3z \end{pmatrix}$,

ainsi $\varphi : (x , y , z) \rightarrow (x+2y-z , x+y , -x+3z)$.

Valeur propre d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou de l'endomorphisme φ canoniquement associé) :
Tout scalaire λ tel qu'il existe au moins un vecteur non nul u de $\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi(u) = \lambda.u$.

Autres formulations de cette condition :

$\exists u \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $(\varphi - \lambda.Id)(u) = 0_{\mathbb{K}^n}$ ou également $Ker(\varphi - \lambda.Id) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$

Formulation matricielle dans laquelle X représente la matrice-colonne des coordonnées de u relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$: $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{\mathbb{O}\}$, $A \times X = \lambda.X$

Sous-espace propre associé à la valeur propre λ de A (ou de φ) : C'est le noyau $E_\lambda = Ker(\varphi - \lambda.Id)$ inclus dans $\mathbb{K}^n$ et dont on a vu qu'il n'était pas réduit à $\{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Vecteur propre de A (ou de φ) associé à la valeur propre λ : Tout vecteur u de $E_\lambda \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dont l' endomorphisme associé est $\varphi : (x , y , z) \rightarrow (x+2y-z , x+y , -x+3z)$
admet 2 pour valeur propre puisque le vecteur non nul u = (1 , 1 , 1) vérifie φ(u) = φ((1 , 1 , 1)) = (2 , 2 , 2) = 2.u
ce que l'on pouvait aussi vérifier matriciellement par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Il est alors légitime de rechercher le sous-espace propre E_2 de A (et de φ) .
La matrice de $\varphi - 2Id$ est $A - 2.I_3$; $\forall u \in \mathbb{R}^3$, notant u = (x , y , z) et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice-colonne correspondante,

$$u \in E_2 \Leftrightarrow (\varphi - 2Id)(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1x + 2y - 1z = 0 \\ 1x - 1y + 0z = 0 \\ -1x + 0y + 1z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1x + 2y - 1z = 0 \\ \quad\quad 1y - 1z = 0 \\ -1x \quad\quad +1z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi, $E_2 = \{(x , y , z)\in \mathbb{R}^3 / x = z \text{ et } y = z\}$

$= \{(z , z , z)/ z\in \mathbb{R} \}$

$= \{z.(1 , 1 , 1)/ z\in \mathbb{R} \}$

<u>$E_2 = \mathbb{R} . (1 , 1 , 1)$</u> droite vectorielle de base (1 , 1 , 1) , les vecteurs propres étant les z.(1 , 1 , 1) où $z \neq 0$.

<u>**Polynôme caractéristique de la matrice A** (ou de l'endomorphisme φ) :</u>
C'est le polynôme de degré n : $P_A(x) = \det(A - x.I_n)$

<u>Polynôme caractéristique d'une matrice A' semblable à A (vérifiant une relation $A' = P^{-1}\times A\times P$ où P inversible) :</u>
C'est le même que celui de A

puisque $P^{-1}\times(A - x.I_n)\times P = P^{-1}\times A\times P - x.P^{-1}\times I_n\times P = A' - x.I_n$
et donc $P_{A'}(x) = \det(A' - x.I_n) = \det(P^{-1}\times(A - x.I_n)\times P) = \det(P^{-1}).\det(A - x.I_n).\det(P) = \det(A - x.I_n) = P_A(x)$

<u>Obtention de l'ensemble des valeurs propres (**le "spectre"**) d'une matrice A (ou de l'endomorphisme φ associé) :</u>
C'est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique $P_A(x) = \det(A - x.I_n)$.

<u>Exemple :</u> Calcul des valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On calcule $P_A(x) = \det(A - x.I_n) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - x.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-x & 2 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{pmatrix}\right)$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 2 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & -1 \\ 2-x & 1-x & 0 \\ 2-x & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x) . \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x) . \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & -2 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x) . (+1).1. \begin{vmatrix} -1-x & 1 \\ -2 & 4-x \end{vmatrix} = (2-x) . [(-1-x)(4-x) - 1.(-2)] = (2-x) . (x^2 -3x -2)$$

Ainsi $P_A(x) = (2-x) . (x^2 -3x -2)$ est le polynôme caractéristique de A.

Les valeurs propres de A sont ses racines : 2 , $\frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ et $\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

Valeurs propres réelles et valeurs propres imaginaires :
Depuis le début de ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ des scalaires est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Selon la nature des coefficients de A, son polynôme caractéristique peut être à coefficients réels ou imaginaires.

Selon le contexte, on pourra être amené à ne rechercher que des valeurs propres réelles ou à envisager aussi d'éventuelles valeurs propres imaginaires.

Sous-espaces propres associés à des valeurs propres de A distinctes λ et μ : Ils vérifient $E_\lambda \cap E_\mu = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Au sujet du polynôme caractéristique P_A de la matrice A :

L'une de ses propriétés fondamentales est qu'il est annulateur de A (Th. de Hamilton-Cayley : $P_A(A) = \mathbb{O}$)

On le qualifie de "scindé" lorsqu'il est factorisable en produit de polynômes du premier degré.

Il l'est toujours dans $\mathbb{C}[X]$, pas toujours dans $\mathbb{R}[X]$ où il peut même n'avoir aucune racine (réelle)
s'il est produit de polynômes du second degré à discriminant < 0.

Lorsqu'il a une racine λ (donc valeur propre de A) , $(x - \lambda)$ peut se mettre en facteur dans $P_A(x)$
à une certaine puissance n_λ qui est "l'ordre de multiplicité" de la racine λ dans $P_A(x)$.

On démontre qu'alors la dimension du sous-espace propre E_λ vérifie les inégalités : $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq n_\lambda$.

-2) L'éventuelle diagonalisabilité de A :

Eventuelle existence d'une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A :

Si les sous-espaces propres sont supplémentaires, leur somme est $\mathbb{K}^n$ et le recollement de leurs bases respectives (toutes formées de vecteurs propres) est donc une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{K}^n$.

Les $n_{\lambda 1}$ premiers ε_i sont associés à la valeur propre λ_1 : ils vérifient donc $\varphi(\varepsilon_i) = \lambda_1 . \varepsilon_i$.
Les $n_{\lambda 2}$ vecteurs ε_i suivants, associés à la valeur propre λ_2 vérifient $\varphi(\varepsilon_i) = \lambda_2 . \varepsilon_i$.
…
Les $n_{\lambda p}$ derniers ε_i associés à la valeur propre λ_p vérifient $\varphi(\varepsilon_i) = \lambda_p . \varepsilon_i$.

Ainsi la matrice de F par rapport à cette base de vecteurs propres $\mathcal{B}'$ apparaît comme une matrice diagonale Δ .

$\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1 , , \lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_2 , \dots , \lambda_p , \dots , \lambda_p)$.

et comme A est la matrice de φ relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, en utilisant les matrices
$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n})$ et $Q = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}) = P^{-1}$, les formules de changement de base donnent les relations

$\boldsymbol{\Delta = P^{-1} \times A \times P}$ et $\boldsymbol{A = P \times \Delta \times P^{-1}}$ traduisant la similitude de A à la matrice diagonale Δ .

On dit qu'**on a diagonalisé A** en Δ .

Situations dans lesquelles on est sûr de la diagonalisabilité de A, matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$\boxed{1}$ Le polynôme caractéristique $P_A(x)$ est scindé à racines simples (= chacune d'ordre 1) .

$\boxed{2}$ $P_A(x)$ est scindé et pour chaque valeur propre λ , $\dim(E_\lambda) = n_\lambda$ ordre de λ comme racine de $P_A(x)$.
(ceci est même une c.n.s.)

$\boxed{3}$ Il existe un polynôme annulateur de A qui soit scindé à racines simples. (c'est également une c.n.s.)

$\boxed{4}$ A est symétrique (égale à sa transposée) et à coefficients réels.

Exemple : Reprenons le cas de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est

$P_A(x) = (2-x) . (x^2 -3x -2) = -(x - 2). (x - \frac{3-\sqrt{17}}{2}).(x - \frac{3+\sqrt{17}}{2})$.

Il est scindé à racines simples donc A est diagonalisable sous la forme $\Delta = \text{diag}(2 , \frac{3-\sqrt{17}}{2} , \frac{3+\sqrt{17}}{2})$.

De la même manière qu'on a calculé que $E_2 = \mathbb{R} . \varepsilon_1$ où $\varepsilon_1 = (1 , 1 , 1)$,

on montre que $E_{\frac{3-\sqrt{17}}{2}} = \mathbb{R} . \varepsilon_2$ où $\varepsilon_2 = (8 , -1 -\sqrt{17} , -6 + 2\sqrt{17})$

et que $E_{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} = \mathbb{R} . \varepsilon_3$ où $\varepsilon_3 = (8 , -1 +\sqrt{17} , -6 - 2\sqrt{17})$.

On a alors $A = P\times\Delta\times P^{-1}$ où $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 1 & -1-\sqrt{17} & -1+\sqrt{17} \\ 1 & -6+2\sqrt{17} & -6-2\sqrt{17} \end{pmatrix}$ et P^{-1} est son inverse .

Utilisation de la trace et du déterminant de A , matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Deux coefficients du polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A (qui a pour degré n) méritent attention.
Le coefficient du terme en x^{n-1} est $(-1)^{n-1}.\text{tr}(A)$ où tr(A) est la trace de A = la somme des termes de sa diagonale descendante .
Le coefficient du terme constant est det(A) .

Puisque deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, si A est diagonalisable en une matrice diagonale Δ , A et Δ ont même trace et même déterminant.

Mais pour Δ, la trace est la somme des valeurs propres, chacune comptée avec son ordre de multiplicité et le déterminant (matrice diagonale) est le produit des valeurs propres .

Un exemple : Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Symétrique réelle, elle est diagonalisable sous une forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ où λ , μ et ν peuvent être égales.

De façon générale, lorsque la somme par ligne des coefficients de A est une constante σ , ce nombre est valeur propre associée au moins au vecteur dont toutes les coordonnées dans la base canonique sont égales à 1 .

Il est clair qu'ici, la somme par ligne est constante, égale à 2 : on peut donc considérer que $\lambda = 2$.

A est donc diagonalisable en $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

Ecrivons alors les égalités des invariants par similitude :
Egalité des traces : $2 + \mu + \nu = 1 + 0 + 1$ soit $\mu + \nu = 0$.
Egalité des déterminants : $2 \times \mu \times \nu = \det(A) = -2$ donc $\mu \times \nu = -1$.
On est donc ramené au problème simple de la recherche de deux nombres connaissant leur somme s et leur produit p . On sait qu'ils sont les racines de l'équation $x^2 - s.x + p = 0$: ici $x^2 - 0.x - 1 = 0$ d'où +1 et −1 .

Le spectre de A est {-1 , 1 , 2} et on peut la diagonaliser en $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

-VI- APPLICATION A LA RESOLUTION DE SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES -

-1) Systèmes différentiels linéaires :

Système différentiel linéaire : $\forall (n , p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $n \leq p$, Pour $i = 1 , \dots ,n$ et $j = 1 , \dots ,p$, on considère :

p fonctions notées $x_j : t \to x_j(t)$ de classe C^1 sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
n fonctions notées $g_i : t \to g_i(t)$ de classe C^1 sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Le système $\begin{cases} x_1' = a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,p} x_p + g_1 \\ x_2' = a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,p} x_p + g_2 \\ \dots \\ x_n' = a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,p} x_p + g_n \end{cases}$ de n équations à p fonctions inconnues $x_1 , x_2 ,.., x_p$

est équivalent à l'équation matricielle $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}$

de la forme $X' = A \times X + B$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} : t \to \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_p(t) \end{pmatrix}$ est une fonction vectorielle de I dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

et $B = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix} : t \to \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \dots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$ est une fonction vectorielle de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Dans ce qui suit nous n'envisagerons que le seul cas particulier où la matrice A est carrée (p = n) et diagonalisable en $\mathbf{A = P \times \Delta \times P^{-1}}$.

-2) Une première méthode de résolution : On a la succession d'équivalences entre égalités de fonctions vectorielles :

$[X' = A\times X + B] \Leftrightarrow [X' = P\times\Delta\times P^{-1}\times X + B]$

$\Leftrightarrow [P^{-1}\times X' = \Delta\times P^{-1}\times X + P^{-1}\times B]$ après produit à gauche par P^{-1}

$\Leftrightarrow [(P^{-1}\times X)' = \Delta\times(P^{-1}\times X) + P^{-1}\times B]$ car P^{-1} étant constituée de constantes, $P^{-1}\times X' = (P^{-1}\times X)'$

$\Leftrightarrow [(Y)' = \Delta\times(Y) + P^{-1}\times B]$

en notant $Y = P^{-1}\times X$ la fonction vectorielle $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} : t \to P^{-1}\times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 + h_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 + h_2 \\ \dots \\ y_n' = + \lambda_n y_n + h_n \end{cases} \quad \text{où} \quad P^{-1}\times B = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} : t \to P^{-1}\times \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \dots \\ g_n(t) \end{pmatrix},$$

système de n équations différentielles indépendantes que l'on sait résoudre séparément .

Les fonctions y_i étant ainsi déterminées, il suffit alors de conclure par $X = P\times Y$ pour trouver les x_i .

Rappels : La solution générale d'une équation différentielle $y' = \lambda y + h$ où $h : t \to h(t)$ est $y : t \to C\, e^{\lambda t} + w$
où $t \to C\, e^{\lambda t}$ est la solution générale de l'équation homogène $y' = \lambda y$
et $w : t \to w(t)$ est une solution particulière de $y' = \lambda y + h$.

Dans le cas fréquent où la fonction h est une "exponentielle-polynôme" $h : t \to t \to e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{d} a_k t^k$

il existe une solution particulière de la forme $w : t \to t^m e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{d} w_k t^k$

où $m = 0$ si $\alpha \neq \lambda$, $m = 1$ si $\alpha = \lambda$.

Un exemple:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 1x_2 - 2x_3 + e^t \\ x_2' = 1x_1 + \quad + e^t \\ x_3' = \quad 1x_2 \quad + e^t \end{cases}$$ peut s'écrire $X' = A\times X + B$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B : t \to \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$.

$sp(A) = \{-1 , 1 , 2\}$; $A = P\times\Delta\times P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$.

Les équivalences déjà détaillées ci-dessus peuvent se résumer à

$[X' = A\times X + B] \Leftrightarrow [(Y)' = \Delta\times(Y) + P^{-1}\times B]$ où $Y = P^{-1}\times X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} : t \to P^{-1}\times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 = -y_1 + 0 \\ y'_2 = y_2 + e^t \\ y'_3 = 2y_3 + 0 \end{cases}$$ système de 3 équations linéaires du premier ordre à coefficients constants.

Résolution de $y'_1 = -y_1$:

$\mathbf{y_1 = C_1.\, e^{-t}}$

Résolution de $y'_2 = y_2 + e^t$:

$\mathbf{y_2 = C_2.\, e^{t} + t.\, e^{t}}$

la solution particulière étant recherchée sous la forme : $w : t \to t^1\, e^{1\,t}.a$ comme conseillé ci-dessus et la valeur de a obtenue après substitution étant 1.

Résolution de $y'_3 = 2y_3$:

$\mathbf{y_3 = C_3.\, e^{2\,t}}$

Ainsi, $[X' = A\times X + B] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1.\, e^{-t} \\ C_2.\, e^{t} + t.\, e^{t} \\ C_3.\, e^{2\,t} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1.\, e^{-t} \\ C_2.\, e^{t} + t.\, e^{t} \\ C_3.\, e^{2\,t} \end{pmatrix}$

et finalement, $\begin{cases} x_1(t) = C_1.\, e^{-t} + C_2.\, e^{t} + 4C_3.\, e^{2\,t} + t.\, e^{t} \\ x_2(t) = -C_1.\, e^{-t} + C_2.\, e^{t} + 2C_3.\, e^{2\,t} + t.\, e^{t} \\ x_3(t) = C_1.\, e^{-t} + C_2.\, e^{t} + C_3.\, e^{2\,t} + t.\, e^{t} \end{cases}$

ce qui peut également s'écrire $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1\, e^{-1.t}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, e^{1.t}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\, e^{2.t}.\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t.e^{t}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

-3) Une deuxième méthode de résolution : **On utilise le résultat :**

La solution de $X' = A\times X + B$ est $X = \sum_{i=1}^{n} C_i\, e^{\lambda_i\, t}.V_i + W$ où

$t \to \sum_{i=1}^{n} C_i\, e^{\lambda_i\, t}.\, V_i$ est la solution générale de l'équation homogène $X' = A\times X$,

Les C_i sont des constantes scalaires librement choisies

Les λ_i sont les valeurs propres de la matrice A (chacune présente autant de fois que son ordre de multiplicité)

Les V_i sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i de même indice et choisis de sorte que $(V_i)_{i=1,\dots,n}$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

W est une fonction vectorielle $W : t \to W(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \dots \\ w_n(t) \end{pmatrix}$ solution particulière de $X' = A\times X + B$.

La méthode de variation des constantes pour trouver une solution particulière :

Son principe : Ayant obtenu comme solution générale de $X' = A\times X$, $X = \sum_{i=1}^{n} C_i \, e^{\lambda_i t} . V_i$,

on propose un cas particulier de solution de $X' = A\times X + B$ de la forme $W : t \to \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \, e^{\lambda_i t} . V_i$,

chaque constante C_i ayant été remplacée par une fonction $t \to C_i(t)$ supposée dérivable sur l'intervalle I considéré.

Par dérivation, $W'(t) = \sum_{i=1}^{n} [C'_i(t) + \lambda_i.C_i(t)] \, e^{\lambda_i t} . V_i$ d'où après substitution dans $X' = A\times X + B$,

$$\sum_{i=1}^{n} [C'_i(t) + \lambda_i.C_i(t)] \, e^{\lambda_i t} . V_i = A \times \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \, e^{\lambda_i t} . V_i + B$$

ou encore $\sum_{i=1}^{n} C'_i(t) \, e^{\lambda_i t} . V_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \, e^{\lambda_i t} . \lambda_i.V_i = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \, e^{\lambda_i t} . A\times V_i + B$

et après simplification, vu que $\forall i \in [\![1 , n]\!]$, $\lambda_i.V_i = A\times V_i$, il reste $\sum_{i=1}^{n} C'_i(t) \, e^{\lambda_i t} . V_i = B$

ce que l'on peut écrire sous la forme $\begin{pmatrix} \boxed{V_1} & \boxed{V_2} & \cdots & \boxed{V_n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C'_1(t).e^{\lambda_1 t} \\ C'_2(t).e^{\lambda_2 t} \\ \cdots \\ C'_n(t).e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = B$

c'est-à-dire $P\times \begin{pmatrix} C'_1(t).e^{\lambda_1 t} \\ C'_2(t).e^{\lambda_2 t} \\ \cdots \\ C'_n(t).e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = B$ d'où $\begin{pmatrix} C'_1(t).e^{\lambda_1 t} \\ C'_2(t).e^{\lambda_2 t} \\ \cdots \\ C'_n(t).e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = P^{-1}\times B$

On dispose alors pour tout i dans $[\![1 , n]\!]$, de l'expression de $C'_i(t)$ dont il suffit de donner une primitive simple $C_i(t)$.

On peut alors formuler explicitement $W(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) \, e^{\lambda_i t} . V_i$.

Reprenons le même exemple:

$\begin{cases} x_1' = 2\,x_1 + 1\,x_2 - 2\,x_3 + e^t \\ x_2' = 1\,x_1 + \qquad\qquad + e^t \\ x_3' = \qquad 1\,x_2 \qquad + e^t \end{cases}$ peut s'écrire $X' = A\times X + B$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B : t \to \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$.

$sp(A) = \{-1 , 1 , 2\}$; $A = P\times\Delta\times P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$.

La solution générale de $X' = A\times X$ est $X = \sum_{i=1}^{n} C_i \, e^{\lambda_i t} . V_i = C_1 \, e^{-1.t}. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \, e^{1.t}. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \, e^{2.t}. \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Une solution particulière de $X' = A\times X + B$ existe sous la forme $W(t) = C_1(t).e^{-1.t}.V_1 + C_2(t).e^{1.t}.V_2 + C_3(t).e^{2.t}.V_3$

Les calculs conduisent à $P\times\begin{pmatrix} C'_1(t).e^{\lambda_1 t} \\ C'_2(t).e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ C'_n(t).e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = B$ soit ici $P\times\begin{pmatrix} C'_1(t).e^{-1t} \\ C'_2(t).e^{1t} \\ C'_n(t).e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} C'_1(t).e^{-1t} \\ C'_2(t).e^{1t} \\ C'_n(t).e^{2t} \end{pmatrix} = P^{-1}\times\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $\begin{cases} C'_1(t) = 0 \\ C'_2(t) = 1 \\ C'_3(t) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} C_1(t) = \text{cste}\ . \\ C_2(t) = t + \text{cste}. \\ C_3(t) = \text{cste}. \end{cases}$

Dans la mesure où l'on ne cherche qu'une solution particulière, choisissons pour simplifier la valeur 0 pour les cstes.

Ainsi $W(t) = 0.e^{-1.t}.V_1 + t.e^{1.t}.V_2 + 0.e^{2.t}.V_3 = t.e^t.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La solution générale de $X' = A\times X + B$ est donc

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1\, e^{-1.t}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\, e^{1.t}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\, e^{2.t}.\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t.e^t.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 .$$