**Exercice 1** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous voulons savoir si $A$ est diagonalisable, et dans ce cas, trouver la matrice $P$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

1. Calculer le polynôme charactéristique de $A$, $p_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_2)$.
2. Résoudre l'équation $p_A(x) = 0$ et trouver les valeur propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de $A$.
3. $A$ est-elle diagonalisable ? (évidemment oui. Pourquoi ?)
4. Résoudre le système linéaire $(A - \lambda_1\mathbb{I})X = 0$
5. en déduire un vecteur propre $v_1$ pour $A$ de valeur propre $\lambda_1$.
6. Même chose pour $\lambda_2$, trouver un vecteur propre $v_2$.
7. écrire la matrice $P$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.
8. Calculer $P^{-1}$.
9. Vérifier que $P^{-1}AP$ est diagonale. Qu'apparaît-il sur la diagonale principale ?

Enfin, calculer $A^5$, et $A^n$, $n$ naturel.

**Exercice 2** Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables, et dans ce cas les diagonaliser :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer la puissance 4 des matrices diagonalisables.

**Exercice 3** Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables, et dans ce cas les diagonaliser :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4** Donner une formule compacte pour $x_n$ et $y_n$, qui sont définis par les équations récurrentes

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2y_n + x_n \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = -2y_n + x_n \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = 4y_n + x_n \end{cases}$$

Stratégie générale :

1. écrire la récurrence de façon matricielle.
2. écrire la relation entre $(x_n, y_n)$ et $(x_0, y_0)$.
3. se convaincre qu'il faut calculer la puissance $n$-ième d'une matrice $A$.
4. à l'aide de la diagonalisation, calculer $A^n$ (cfr. ex. 1).
5. donner les formules compactes pour $x$ et pour $y$.

.