

Exercice 1 Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + x + 1} - x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} - x.$$

Exercice 2 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (3x^2 + 7) \ln(x)$

2. $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

3. $f(x) = \sqrt{x^4 + 8}$

4. $f(x) = \ln(7 - x^2)$

5. $f(x) = 3x^2 \ln(x)$

6. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Exercice 3 Soit $f(x) = (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})$ (pour $x > 0$). Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$.

Exercice 4 Calculer les dérivées des fonctions goniométriques suivantes (rappel : $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$) :

1. $f(x) = \cos(2 - x)$

2. $f(x) = (\sin(x) + 3)^4$

3. $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

4. $f(x) = \arccos(\arctan(x))$

5. $f(x) = 5 \cos^2(x) - 4 \sin(x) \cos(x) - 5 \sin^2(x) + 2 \sin(2x)$

Exercice 5 Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$. En déduire les valeurs de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 Déterminer les coefficients du polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sachant que $P(0) = P(1) = -1$, $P'(0) = -1$ et $P''(0) = 10$.

Exercice 7 Calculer les limites suivantes, en utilisant la définition de la dérivée :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$$

Exercice 8* Étudier la suite $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ en exprimant u_n avec $\ln(-)$ et $\exp(-)$, puis en posant $x = 1/n$.