Feuille de TD 4.

Ex. 1.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2+x+1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\,(-1-\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0})}{\cancel{x^2}\,(1+\underbrace{\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}}_{\to 0})}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\,(1-\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0})}{\cancel{x}\,\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}}_{0}}}_{1}+\underbrace{1}_{1}\right)}_{2}}=\frac{1}{2}$$

Ex. 2. $f(x)=(3x^2+7)\ln x \Rightarrow f'(x)=(6x)\ln x+(3x^2+7)\cdot\frac{1}{x}=$

$=6x\ln x+3x+\frac{7}{x}$ pour $x>0$.

$$f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x(x^2+1)-e^x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f(x)=\sqrt{x^4+8}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+8}}=\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+8}}$$

$f(x)=\ln(7-x^2)\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{7-x^2}=\frac{2x}{x^2-7}$ pour $7-x^2>0$,

c-à-d $-\sqrt{7}<x<\sqrt{7}$

$f(x)=3x^2\ln x \Rightarrow f'(x)=6x\ln x+3x^2\cdot\frac{1}{x}=6x\ln x+3x$ pour $x>0$

$f(x)=e^{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x>0$.

Ex. 3. $f(x)=(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})$. Il suffit de remarquer que pour $x>0$,

$f(x)=1-x \Rightarrow f'(x)=-1\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow f'''(x)=0$.

Ex. 4. $f(x) = \cos(2-x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(2-x)\cdot(-1) = \sin(2-x)$

$f(x) = (\sin(x)+3)^4 \Rightarrow f'(x) = 4(\sin x+3)^3 \cdot \cos x$

$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x \to f'(x) = 2\sin x \cos x + 2\cos x(-\sin x)$

$= 0$, car en fait $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$.

$f(x) = \arccos(\arctan x) \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(\arctan x)^2}} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$

$f(x) = 5\cos^2 x - 4\sin x\cos x - 5\sin^2 x + 2\sin(2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = 10\cos x(-\sin x) - 4\cos^2 x + 4\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 2\cos 2x \cdot 2$

$= -10\cos x\sin x - 4\cos^2 x + 4\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 4\cos 2x$.

Ex. 5. $f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ définie pour $x \neq 0$.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} \cdot \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{x^2}{x^2+1} \cdot \dfrac{1}{x^2} = 0$

donc $f(x)$ est constante où elle est dérivable $\Rightarrow$

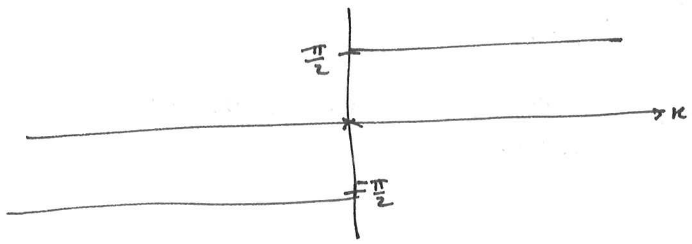
pour $x>0$ $f(x)$ est constante, de valeur $f(1) = \arctan 1 + \arctan 1$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

en $x=0$ f n'est pas définie

pour $x<0$ $f(x)$ est constante, de valeur $f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1)$

$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$



Ex. 6. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et $P(0) = 1 \Rightarrow d = 1$

$P(1) = 1 \Rightarrow a+b+c+d = 1$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $P'(0) = -1$

$\Rightarrow c = -1$

~~P''(x)~~ $P''(x) = 6ax + 2b$ et $P''(0) = 10 \Rightarrow 2b = 10$

On a donc 4 relations pour a, b, c, d qui se traduisent dans le système

$$\begin{cases} d=-1 \\ a+b+c+d=-1 \\ c=-1 \\ 2b=10 \end{cases} \quad \begin{cases} d=-1 \\ c=-1 \\ b=5 \\ a+5-1-1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \\ c=-1 \\ d=-1 \end{cases} \Rightarrow P(x)=-4x^3+5x^2-x-1$$

Ex. 7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x^2)\cdot 2x}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-0}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\cos \pi x \cdot \pi}{1} = -\pi$$

Ex. 8.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

on étudie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

on pose $\frac{1}{n}=x \longrightarrow 0^+$: $\displaystyle = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1}$$

$$= 1$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^1 = e.$