Négligeabilité

14/10/2013

$I =]a,b[\subset \mathbb{R}$, $f, \underset{\not\equiv 0}{g}$ continues en $x_0 \in I$: on compare le comportement de f et g.

f négligeable devant g au voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

On note $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$ "petit o"

Ex. $-x^3 \underset{x \to 0}{=} o(x)$, $x^3 = o(x^2)$

On s'intéresse à $g(x) = x^n$, alors

$o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$, $o(x^n)\, o(x^m) = o(x^{m+n})$

$\dfrac{o(x^n)}{x^m} = o(x^{n-m})$ $m < n$.

Dérivées successives

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction.

si f dérivable $\forall x_0 \in I$, on définit $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$

... $f^{(n+1)}(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0)$ si elle existe.

ex. $f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$ $f''(x) = -\sin x$ $f'''(x) = -\cos x$ $f^{(4)}(x) = \sin x$. etc.

Polynôme de Taylor de f

Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable n fois en $]a,b[$. Soit $x_0 \in]a,b[$.

polynôme de Taylor de degré n en x_0 :

$$T_n(f,x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Théorème de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

en particulier :

$n=1$: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o((x-x_0))$

$n=2$: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$

$x_0 = 0$: formules de MacLaurin

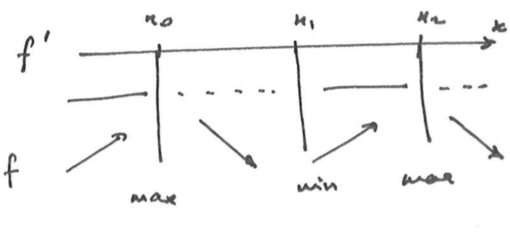
$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$

Applications : calcul des limites.

Rappel Maxima et minima de $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

x_0 est point critique pour f si $f'(x_0) = 0$.



si x_0 point critique :

$$f(x) = f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x-x_0)} + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \overbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}^{>0} > f(x_0)$ près de x_0 ~~proche de~~

$\Rightarrow$ x_0 point de minimum local

si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ près de x_0 $\rightarrow$ x_0 point de max local.

$f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ on ne peut conclure.