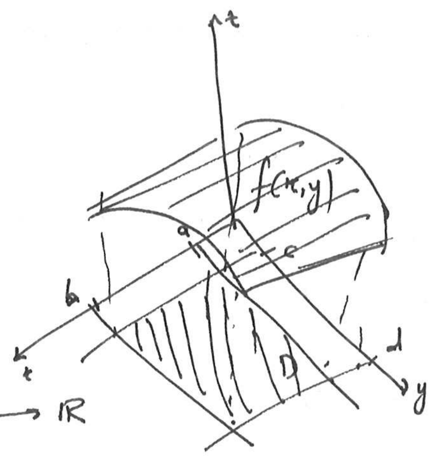
Fonctions de deux variables

16/10/2013

$D =]a,b[\times]c,d[$ a,b,c,d réels ou $\pm\infty$



$$f : \begin{cases} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x,y) \end{cases}$$

Dérivées partielles

par rapport à x en (x_0,y_0) :

c'est la dérivée en x_0 de $g : \begin{cases}]a,b[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x,y_0) \end{cases}$

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$$

par rapport à y en (x_0,y_0) :

dérivée en y_0 de $h : \begin{cases}]c,d[\longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto f(x_0,y) \end{cases}$

$$f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}$$

Recette : $\frac{\partial f}{\partial x}$: on dérive par rapport à x et on traite y comme paramètre fixé

Exemples. $x^2+3xy+y^2$, $\exp(3x+7y^2)+y$ etc.

Dérivées d'ordre 2 : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f_{xx}(x,y)$ ... $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f_{yy}(x,y)$

~~Formule de Taylor ordre 2~~

Lemme de Schwarz : Si f a les dérivées partielles d'ordre 2 continues,

alors $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.}$

Extrema locaux f, (x_0,y_0) ext. loc. si $\exists$ $\overset{(x_0,y_0)}{D}$ disque $\subseteq \mathbb{R}^2$, t.q.

$\forall (x,y) \in D$, $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ (min. loc.)

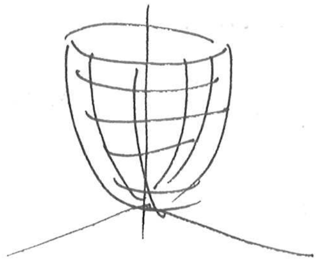
$f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ (max. loc.)

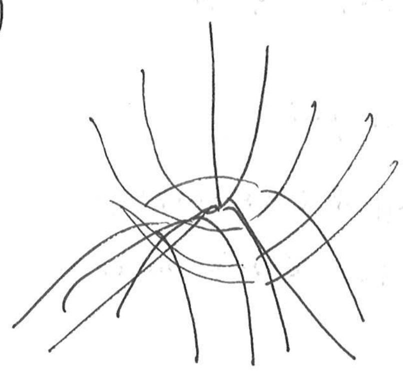
Gradient : $\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

(x_0,y_0) critique si $\nabla f(x_0,y_0) = 0$

Prop. (x_0,y_0) ext. loc. $\Rightarrow$ critique.

$\Leftarrow$ fausse !





__exemples__ $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$(0,0)$ est de min. $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$

$f(x,y) = x^2 - y^2$ $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$

$(0,0)$ est de __selle__ $f(0,h) = -h^2 < 0 < h^2 = f(h,0)$

ni de max ni de min

$f(x,y) = -x^2 - y^2 \Rightarrow (0,0)$ max.

__Pour trouver les extrema locaux__

1. trouver les points critiques : $\nabla f = 0$.
2. Calculer les dérivées d'ordre 2 :

__matrice hessienne :__ $Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy} \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy} \end{pmatrix}$

- $\det Hf(x_0,y_0) > 0$: extremum local :
  - $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$: minimum
  - $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$: maximum
- $\det Hf(x_0,y_0) < 0$: point selle
- $\det Hf(x_0,y_0) = 0$: on ne peut conclure.

__Formule de Taylor__ : f dérivable 2 fois en $D \ni (a,b)$.

$$f(a+x, b+y) = \overbrace{f(a,b)}^{\text{ordre } 0} + \overbrace{f_x(a,b)\,x + f_y(a,b)\,y}^{\text{ordre } 1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\left[f_{xx}(a,b)\,x^2 + 2 f_{xy}(a,b)\,xy + f_{yy}(a,b)\,y^2 \right]}_{\text{ordre } 2} + o(x^2+y^2).$$