Ex. sur la matrice inverse : ex. 8 23/09/2013

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{inversible}$$

ex. 9 $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ non inversible.

- si on ne peut transformer D en $\mathbb{1}_3$, alors D n'est pas inversible
- sinon, quand à gauche il y a $\mathbb{1}$, à droite il y a D^{-1}.

justification : opération sur les lignes de D $\Leftrightarrow$ TD, où T matrice inversible :

p. ex. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \text{II} \\ \text{I} \\ \text{III} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspond à $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{D}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ correspond à $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $(D \mid \mathbb{1}) \rightsquigarrow (\underbrace{T_k T_{k-1} \cdots T_1 D} \mid T_k T_{k-1} \cdots T_1) = (\mathbb{1} \mid T_k T_{k-1} \cdots T_1)$

alors $(T_k T_{k-1} \cdots T_1) D = \mathbb{1}$ c-à-d $T_k T_{k-1} \cdots T_1 = D^{-1}$.

Diagonalisation de matrices 2×2

Motivations : 1. Calculer les puissances des matrices.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix} \quad A^3 = A^2 \cdot A \quad \ldots$

une formule compacte pour A^n ?

~~ex.~~ Remarque Si A diagonale : $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \underbrace{A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}}_{\text{formule compacte.}}$

$\Rightarrow$ si A diagonale, le problème est résolu.

2. Équations récurrentes On a deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ définies par les éq. récurrentes $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n \end{cases}$ et ~~la condition~~ en connaissant $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

ex. $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+6\\2+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2y_1\\2x_1+y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7+10\\14+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\19\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2+2y_2\\2x_2+y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17+38\\34+19\end{pmatrix} = \ldots$

on veut calculer une formule compacte pour $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ en termes de $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ (c-à-d sans passer par $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}$)

<u>Remarque</u> En termes de matrices :

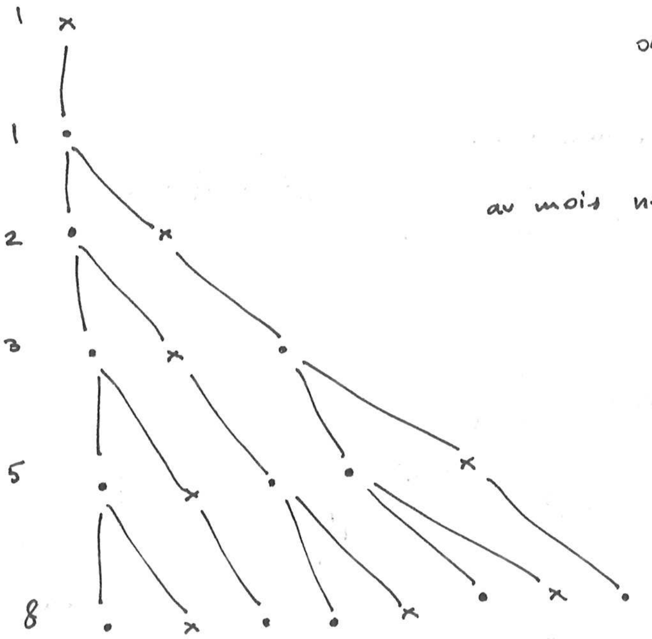
$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$

$\ldots \quad \begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}}_{A}^{n}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$: le problème est résolu si on sait calculer A^n.

<u>autre exemple de récurrence</u> : <u>la suite de Fibonacci</u>

<u>le problème</u> : un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du début du troisième mois de son existence ?

$\times$ = couple impubère $\quad \bullet$ = couple pubère



on a : x_n

x_{n+1}

$x_{n+1} - x_n$ = nouveaux couples impubères

au mois $n+2$:

$x_{n+2} = 2x_n + (x_{n+1} - x_n)$

$= x_{n+1} + x_n$

$$\boxed{x_{n+2} = x_{n+1} + x_n}$$

pour se ramener aux matrices, on pose $\begin{pmatrix}x_1\\x_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_0\\x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_{n+2}\\x_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n+1}\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{n+1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

donc il faut calculer les puissances de $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$...

Déf. Une matrice carrée est <u>diagonalisable</u> si $\exists\, P$ inversible t.q. $P^{-1}AP = \Delta$ ↪ diagonale. $\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$

<u>Remarque</u> : Si A diagonalisable $\Rightarrow A = P\Delta P^{-1}$

$$\Rightarrow A^n = \underbrace{(P\Delta \cancel{P^{-1}})(\cancel{P}\Delta P^{-1}) \cdots (\cancel{P}\Delta P^{-1})}_{n \text{ fois}} = P\Delta^n P^{-1}$$

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 \\ 0 & d_2^n \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = P \begin{pmatrix} d_1^n & 0 \\ 0 & d_2^n \end{pmatrix} P^{-1}. \Rightarrow \text{pb. résolu !}$$

il faut
- ~~trouver~~ savoir si A est diagonalisable
- trouver d_1, d_2
- trouver P.

<u>Remarque</u> : supposons A diagonalisable

$A = P\Delta P^{-1}$ soit $P = \left(v_1 \middle| v_2 \right) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$

alors $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P} \begin{pmatrix} v_{22} & -v_{12} \\ -v_{21} & v_{11} \end{pmatrix}$

et
$$Av_1 = P\Delta P^{-1} v_1 = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{22} & -v_{12} \\ -v_{21} & v_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} d_1 v_{11} & d_2 v_{12} \\ d_1 v_{21} & d_2 v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underbrace{v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21}}_{= \det P} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d_1 v_{11} & d_2 v_{12} \\ d_1 v_{21} & d_2 v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 v_{11} \\ d_1 v_{21} \end{pmatrix} = d_1 v_1$$

et aussi $Av_2 = d_2$

~~Il faut donc~~ **Déf.** A matrice $n \times n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. v <u>vecteur propre</u> de A de <u>valeur propre</u> d si $Av = dv$, $d \in \mathbb{R}$. ~~d est appelé~~.

<u>Remarque</u> $Av = dv \Leftrightarrow Av - d\mathbb{1}v = 0 \Leftrightarrow \boxed{(A - d\mathbb{1})\, v = 0}$, $v \neq 0$

Proposition. M inversible $\Leftrightarrow [x \in \mathbb{R}^n,$ si $Mx = 0 \Rightarrow x = 0]$

d donc $\Leftrightarrow (A - d\mathbb{1})$ pas inversible $\Leftrightarrow \underbrace{\det(A - d\mathbb{1})}_{\text{polynôme caractéristique}} = 0$.

<u>Stratégie</u>.
- Matrice A carrée. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ | ex. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ etc.
- polynôme caractéristique $p_A(x) = \det(A - x\mathbb{1})$

· <u>valeurs propres</u> : les solutions de $P_A(x)=0$ λ_1, λ_2

· A diagonalisable ?

- λ_1, λ_2 conjuguées complexes : A non diag. sur $\mathbb{R}$.
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ réels : A diag. $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
- $\lambda_1 = \lambda_2$: A diagonalisable $\Leftrightarrow$ A déjà diagonale. (au départ, rien à ajouter)

si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ réels :

· vecteurs propres :

- vecteur propre v_1 de v.al. pr. λ_1 : une sol. non-nulle de $(A - \lambda_1 \mathbb{1})X = 0$
- " " v_2 λ_2 " " $(A - \lambda_2 \mathbb{1})X = 0$

· $P = \left(v_1 \,|\, v_2 \right)$ en colonne dans l'ordre.

Alors $P^{-1} A P = \Delta$ (vérifiez).

<u>ex. 1.</u>

<u>Applications</u> : 1. <u>Puissance</u> de la matrice : $A = P \Delta P^{-1}$

$$A^n = P \Delta^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

2. <u>Récurrences</u> : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ cela se ramène au calcul de la puissance n de A.

ex. 4.