Ex. sur la diagonalisation 3, 4 (iii). Puissances de A. 30/09/2013

Feuille 1

II. Analyse

Rappels des principales fonctions : | fonctions d'une var. réelle $f : \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$

X = partie de $\mathbb{R}$ réunion d'intervalles ouverts

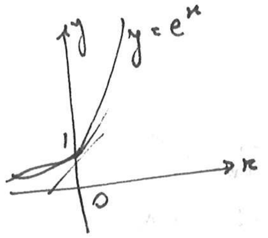
$X = \mathbb{R}$, $X =]0, +\infty[$

$X =]-\infty, -3[\cup]-2, 0[$

Exponentielle $\exp \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x \end{cases}$ ~~exp~~

strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

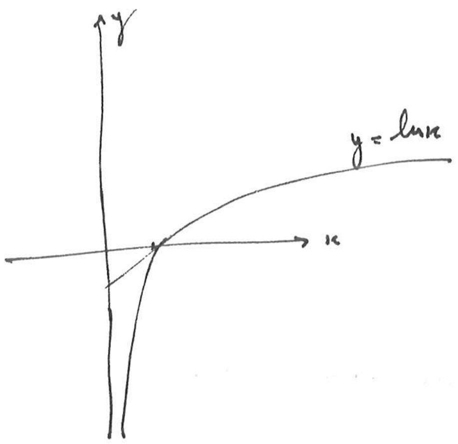


$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$e^0 = 1, \quad e^1 = e \simeq 2,718.$

Logarithme $\ln : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{cases}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_{>0} =]0, +\infty[$

$\forall x, y \in]0, +\infty[$ on a $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.



$\forall x \in \mathbb{R} \quad \boxed{\ln e^x = x}$

$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \boxed{e^{\ln x} = x}$

Donc exp et ln sont réciproques

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Puissances $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f_\alpha : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[\\ x \longmapsto e^{\alpha \ln x} \quad (= x^\alpha) \end{cases}$

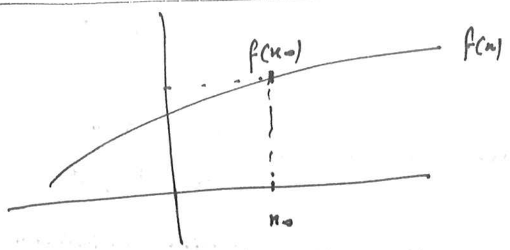
qui est la généralisation de la puissance classique. P. ex.

$f_2(x) = x^2$ car $f_2(x) = e^{2 \ln x} = e^{\ln x + \ln x} = e^{\ln x} \cdot e^{\ln x} = x \cdot x = x^2$ etc.

Proposition 2.2. $\forall x \in]0, +\infty[\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta.$

Limites et continuité



$\lim_{x\to x_0} f(x)$ = "où va la fonction f quand x est proche de x_0".

$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = d} \iff$

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. pour $\forall x \neq x_0$ t.q. $|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - \cancel{f(}d| < \epsilon$.

pour l'infini, $\boxed{\lim_{x\to \infty} f(x) = d} \iff$

$\forall \epsilon > 0$, $\exists M > 0$ t.q. $\forall x$ t.q. $x > M$, $|f(x) - d| < \epsilon$.

Rappel formes déterminées : $\frac{f(x)}{g(x)}$ ou $f(x)g(x)$ ou $f(x)+g(x)$ et on sait $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$

$l \cdot \pm\infty = \pm\infty$ si $l>0$

$l \cdot \pm\infty = \mp\infty$ si $l<0$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$+\infty \cdot \pm\infty = \pm\infty$

$+\infty \pm c = +\infty$

$\frac{l^{>0}}{\pm\infty} = 0^{\pm}$ $\quad \frac{l^{>0}}{0^{\pm}} = \pm\infty$

Formes indéterminées :

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, $+\infty - \infty$

on ne peut prévoir le résultat à l'avance, il faut discuter chaque cas.

Ex. 1. $\infty - \infty$. Fonctions rationnelles. $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Continuité $f : X \to \mathbb{R}$ continue en $x_0 \in X$ si $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$

(si x est proche de x_0, $f(x)$ est proche de $f(x_0)$)

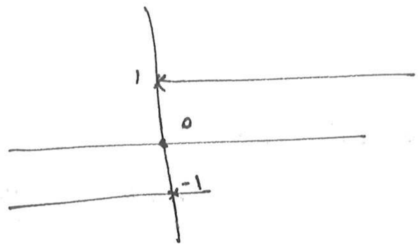
f continue sur I intervalle si f continue sur tout $x_0 \in I$.

(intuitivement : on peut tracer le graphe "sans lever le crayon").

ex. Polynômes : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ continue partout en $\mathbb{R}$.

f exponentielle : sur $\mathbb{R}$, logarithme : pour $x>0$. Puissance : $x>0$.

ex.



f non continue en $x_0 = 0$, continue ailleurs.

Prop. f, g continues en $x_0 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f+g$, $f \cdot g$ cont. en x_0.

Si ~~f~~ $g(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ continue en x_0.

Si f continue en x_0, g continue en $f(x_0)$ $\Rightarrow$

fonction composée $g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$ continue en x_0.

ex. $\cos(x^2)$

$\tan(\ln x)$ etc.

Ex. 2. Trouver où f est continue, trouver l'ensemble de définition de f.

Négligeabilité $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$, f, g continues en $x_0 \in I$: ~~car~~ on compare le comportement de f et g
$g \not\equiv 0$

f négligeable devant g au voisinage de x_0 si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

On note $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$ petit o.

Ex. $-x^3 = \underset{x \to 0}{o}(x)$ car $\dfrac{-x^3}{x} = -x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Comparaison des croissances

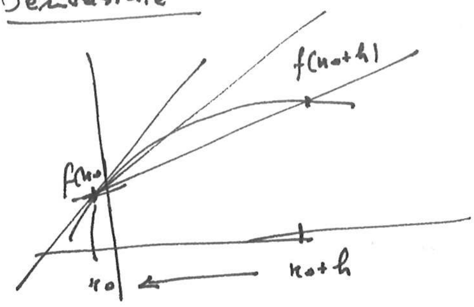
principe général : « les puissances l'emportent sur log, mais pas sur exp ».

$\alpha > 0, \beta > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$

$\alpha > 0, \beta > 0$: $\lim\limits_{x \to 0} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$

$\alpha > 0, \beta > 0$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

Dérivabilité



$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

f dérivable en $x_0 \in I$ si

$$\exists \underset{(\text{fini})}{} \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

f dérivable en I si dér en $\forall x_0 \in I$.

$\Downarrow$

f continue en I.

c'est la pente de la droite tangente à f en x_0 :

éq. de la tangente : $y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x-x_0)$

et on a $\quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + o(x-x_0)$

car $$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \longrightarrow f'(x_0)-f'(x_0) = 0.$$

Opérations sur les dérivées

$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$

$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \quad$ car $\lambda' = 0$.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Règle de la chaîne : $\boxed{(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$

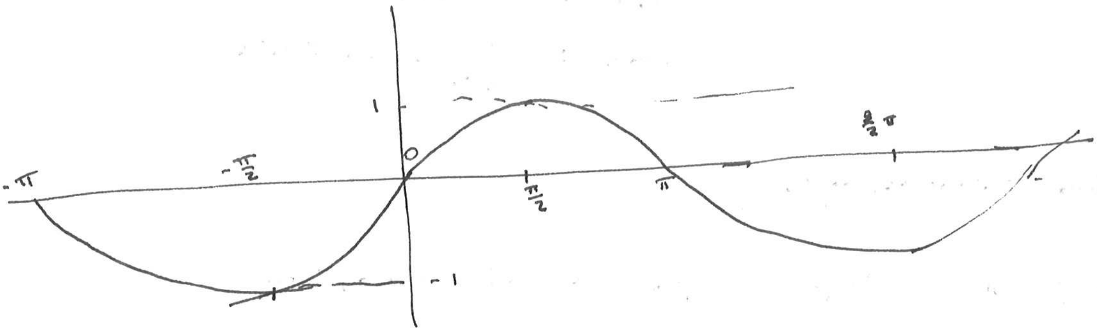
Dérivées de $\quad x^\alpha \longrightarrow \alpha x^{\alpha-1}$

$\qquad \ln x \longrightarrow \frac{1}{x}$

$\qquad e^x \longrightarrow e^x$

Ex. 2. $\qquad$ Ex. 3.

Fonctions trigonométriques



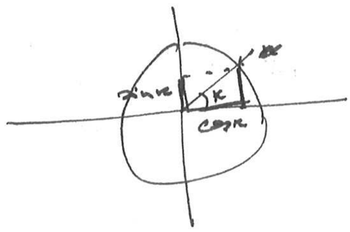
sin : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin x \end{cases}$ continue, périodique, période 2π $\quad -1 \leq \sin x \leq 1$

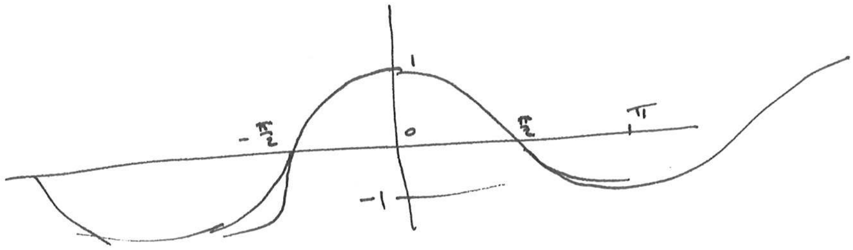
$\sin(x+2\pi) = \sin x$

Fonctions circulaires

impaire : $\sin(-x) = -\sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0





cos : $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos x \end{cases}$ continue, 2π - périodique

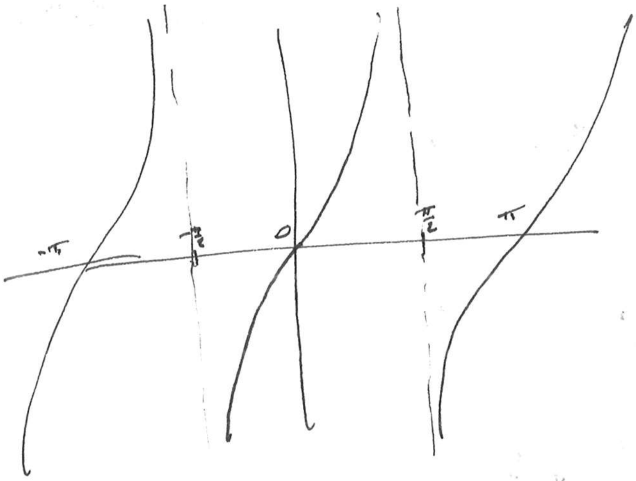
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1

$-1 \leq \cos x \leq 1$

Relations fondamentale $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

Tangente

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$



$\cos x \neq 0 \Rightarrow$

$\tan x$ définie pour

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

continue strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, impaire ($\tan(-x) = -\tan x$)

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \qquad \tan(0) = 0$.

Ex. 4. pts 1. 2. 3.

Dérivée de $\sin x$: $\cos x$

$\cos x$: $-\sin x$

$\tan x$: $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Réciproques des fonctions trigonométriques

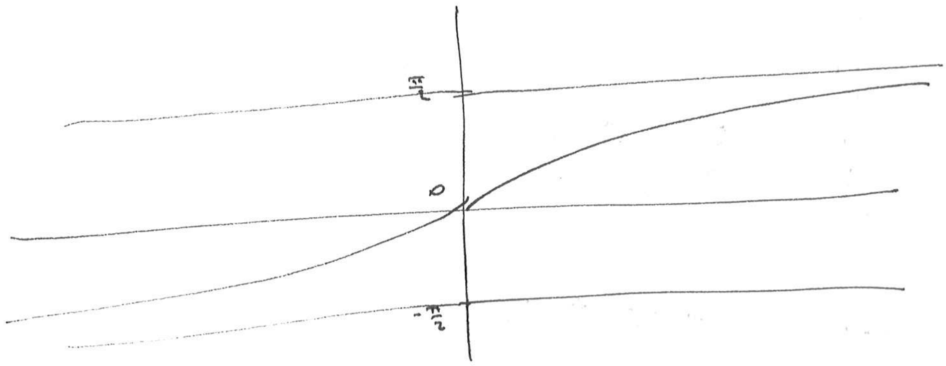
Rappel réciproque de f est g t.q. $g(f(x)) = x$ et $f(g(x)) = x$.

On peut définir la réciproque seulement d'une fonction strictement croissante ou strictement décroissante.

$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ strict. croissante

$\Rightarrow \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ t.q. $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$

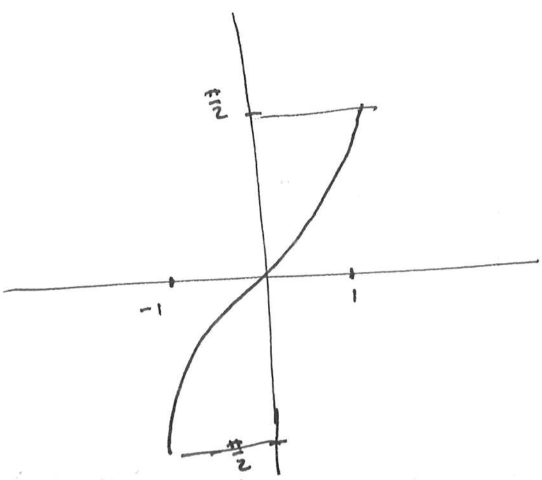
$x \longmapsto \arctan x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\tan(\arctan x)$.



$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ strict. croissant

$\Rightarrow \arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ t.q. $\forall x \in [-1, 1]$ $\sin(\arcsin x) = x$

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin(\sin x) = x$

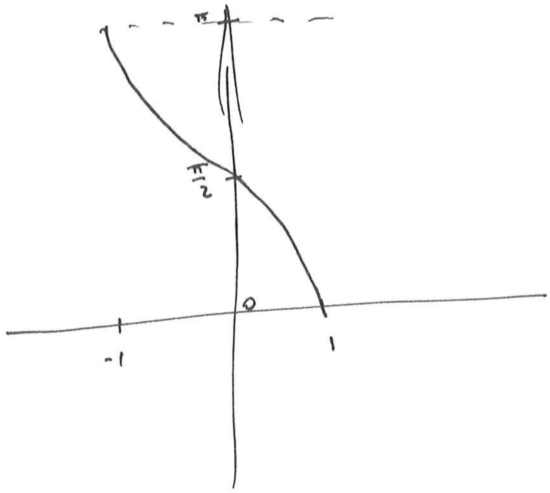


Même chose pour le cosinus :

$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ strict. décroissant

$\Rightarrow \arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ t.q. $\forall x \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos x) = x$

$\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos x) = x$.



<u>Dérivées des réciproques des fonctions trigonométriques :</u>

$\arcsin x \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1, 1[$

$\arccos x \longrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1, 1[$

$\arctan x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^2}$ $\forall$

Ex. 4 finir, 5.

<u>Calcul des limites avec les dérivées :</u> règle de l'Hôpital.

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ c fini ou $c = \infty$

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$

et $g' \neq 0$ sauf au plus en c

<u>et</u> $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = d$, <u>alors</u> $\boxed{\exists \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = d = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$

<u>si</u> la limite du quotient des dérivées existe, alors la limite du quotient des fonctions existe aussi, et les deux limites sont égales. Condition suffisante.

<u>Ex. 7.</u>