ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. Introduction.

Équation diff : éq. où l'inconnue est une fonction $f(t)$ à déterminer.

ex. $f''(t) + 5f'(t) + 6f(t) = 0$, $\quad f' + \cos t\, f + \sin t = 0$ etc.

ex. facile : $f'(t) = \cos t \Rightarrow f(t) = \int \cos t\, dt = \sin t + C \Rightarrow$ on s'attend à une infinité de solutions

Attention : Notation pas standard : on écrit y à la place de $y(t)$: $y'' + 6y' + 5y = 6t$

- variable t fonction $y(t)$,
- var. x fonction $y(x)$, $y'' + 6y' + 5y = 6x$
- var. t fonction $x(t)$, $x'' + 6x' + 5x = 6t$

II. Définitions

~~Éq~~ Déf. n entier, I intervalle, $y : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ fonction dét, dérivable n fois en I,

éq. diff. d'ordre n : éq liant y et ses dérivées jusqu'à $y^{(n)}$:

$$\boxed{y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)\, y(t) = b(t)} \qquad (E)$$

- éq. homogène associée : $y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0 \qquad (E_0)$
- second membre : $b(t)$
- Solutions de (E) : une fonction y n fois dérivable qui satisfait (E) $\forall t \in I$.

III. Structure des solutions

Rem. y_1, y_2 sol. de (E_0), alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ sol de (E_0) $\forall \lambda_1, \lambda_2$.

Dem. $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n)} + a_{n-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n-1)} + \dots + a_0(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) =$

$= \lambda_1 \left[y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \dots + a_0 y_1 \right] + \lambda_2 \left[y_2^{(n)} + \dots + y_2 \right] = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$.

Rem. Cela est vrai pour (E_0), en gén. pas pour (E).

Prop. ~~Les sols~~ Toute solution de (E) est somme de

$$\boxed{1 \text{ sol. particulière de } (E)\ y_p + 1 \text{ sol. de } E_0\ y_h}$$

Dem. ~~Si y_p sol de (E) ... $y - y_p$~~ y sol. de (E) :

$y - y_p$ est sol. de (E_0) $\Rightarrow y = \underbrace{(y - y_p)}_{y_h} + y_p$

$\Rightarrow$ ~~Technique~~ Stratégie générale pour résoudre (E) :

$(E) \rightsquigarrow (E_0)$ on résout E_0 : ~~y_h~~

on cherche une sol. part y_p de (E).

Solutions de (E) : $y_p + ($~~y_h~~ toutes les sols de $(E_0))$

IV. Éq. diff. linéaires d'ordre 1

IV (i) Déf.

$$\boxed{y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)} \quad (E)$$

d'ordre 1 : y et y'
linéaires : pas de y^2 ou $(y')^2$ etc.

~~forme canonique~~

éq. hom. associée : $\boxed{y' = ay}$ (E_0)

IV (ii). Sol. de (E_0) :

Prop. Soit $A(t)$ une primitive de $a(t)$ sur I.

$\Rightarrow y_h(t) = C e^{A(t)}$, $C \in \mathbb{R}$. [On écrit aussi $y_h(t) = C\, e^{\int a(t)\,dt}$]

Dém. y_h satisfait (E_0) : $y_h' = C e^{A(t)} \cdot A'(t) = \underbrace{C e^{A(t)}}_{y_h} \cdot a(t) = a(t)\, y_h(t)$

Réciproquement, soit y sol. de E_0, posons $z = y e^{-A(t)}$

$\Rightarrow z' = y' e^{-A(t)} + y\, e^{-A(t)}(-a(t)) = \cancel{a(t) y(t) e^{-A(t)}} + \cancel{y\, e^{-A(t)}(-a(t))} = 0$

y' → sol. de (E_0)

$\Rightarrow z = C = y e^{-A(t)} \Rightarrow y = C e^{A(t)}$. ⊠

Ex. 1., Ex. 5., Ex. 6.

IV (iii) Sol. particulière de (E)

Récette. Soit $y_0(t) = e^{A(t)}$ la sol. de E_0 avec $C = 1$.

Alors une sol. particulière de (E) est donnée par

$$\boxed{y_p(t) = c(t)\, y_0(t) \quad \text{où} \quad c(t) = \int \frac{b(t)}{y_0(t)}\,dt}$$

(on choisit une primitive)

ex. $y' + y = xe^{-x} + 1$. $y' + \cos t\, y = \sin t \cos t$ (*int. par parties).

Dém. (Méthode de variation de la constante).

On cherche une sol. de (E) de la forme $y_p(t) = c(t)\, y_0(t)$:

$$y_p'(t) = a(t)\, y_p(t) + b(t) = \cancel{a(t)\, c(t)\, y_0(t)} + b(t)$$

$$\| $$

$$c'(t) y_0(t) + c(t) y_0'(t) = c'(t) y_0(t) + \cancel{c(t)\, a(t)\, y_0(t)}$$

$$\Leftrightarrow c'(t)\, y_0(t) = b(t) \Leftrightarrow c'(t) = \frac{b(t)}{y_0(t)} \quad \text{c-à-d} \quad c(t) = \int \frac{b(t)}{y_0(t)}\,dt.$$

Rem. Il faut que $y_0(t)$ ~~soit ensemble~~ ne s'annule pas sur I.

Ex. 8., Ex. 6-7. $y' = ty + t$ (**Rem.** $y' = t(y+1)$ $y = -1$ est solution)

IV (iv) Sol. particulières : ~~recours~~

Cas particulier : $y'(t) = a\,y(t) + b(t)$ $\quad a \in \mathbb{R}$ constante (ne dép. pas de t)

ex. $y' = \underbrace{2}_{a} y + \underbrace{\sin 3t}_{b(t)}$

On sait déjà quelle forme a une sol. part y_p ;

$b(t)$	sol. part. y_p
polynôme de deg n en t	pol. de deg n à déterminer
$c\,e^{kt}$ (avec e^{kt} non sol. de E_0)	$A\,e^{kt}$, A à déterminer
$c\,e^{kt}$ (e^{kt} sol. de E_0)	$At\,e^{kt}$, A à déterminer
$a \sin kt$	$A \sin kt + B \cos kt$, A, B à déterminer
$b \cos kt$	$A \sin kt + B \cos kt$ "
somme de termes ci-dessus	sommes des termes correspondants.

Ex. 1.

IV (v). Problème de Cauchy (linéaire d'ordre 1)

$$(P.C.)\quad \begin{cases} y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t) & (E) \\ y(t_0) = y_0 \begin{pmatrix} t_0 \in I \\ y_0 \in \mathbb{R} \end{pmatrix} & \text{C. I. condition initiale} \end{cases}$$

ex. $\begin{cases} y' = ty + t & (E) \\ y(0) = 2 \end{cases}$ il faut trouver la solution, parmi l'infinité de soll. de (E), qui vérifie C.I.

Théorème. Le (P.C.) linéaire d'ordre 1 admet une unique sol.

Stratégie.
- On résout (E) en général ;
- on obtient une famille de soll. qui dépendent d'une constante C.
- Avec C.I. on fixe la valeur de C.

Ex. 3. Ex. 1.

V. Éq. diff. d'ordre 2 linéaires à coeffs. constants

V(i). Définitions

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \quad (E)$$

a, b, c constantes $\in \mathbb{R}$
$a \neq 0$ (sinon pas d'ordre 2)
$f : I \to \mathbb{R}$ fonction.

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \quad (E_0)$$ éq. homogène associée.

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (E.c.)$$ éq. caractéristique

Stratégie de résolution : la même :
- sol. générale de l'homogène (E_0) : y_h
- sol. particulière de (E) : y_p

$$\Rightarrow \boxed{y = y_p + y_h}$$

V(ii). Sol. de l'homogène (E_0)

les sol. de (E_0) dépendent de la nature des racines de $(E.c.)$.

Prop. (i) Si $(E.c.)$ a $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ distinctes

$$\Rightarrow y_h(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(ii) Si $(E.c.)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ racine double

$$\Rightarrow y_h(t) = (A + Bt)e^{\lambda t} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(iii) Si $(E.c.)$ a $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ complexes conjuguées,

$$y_h(t) = e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Rem. toujours A, B : infinie famille de sol. avec 2 paramètres.

Ex. $y'' - 6y' + 9y = 0$

V(iii). Sol. particulière de (E) $\quad ay'' + by' + cy = f(t)$

Rem. $\exists$ l'analogue de la méthode de var. de la constante mais nous le traitons pas.
On fait des cas simples, pour lesquels on connaît la forme d'une sol. part. à déterminer.
(Tableau.)

Ex. $y'' - 6y' + 9y = 18 \quad y_p = 2 \quad y(t) = (A + Bt)e^{3t} + 2.$

Ex.

V(v). Problème de Cauchy (linéaire d'ordre 2 à coeff. constants)

$$(P.C.)\begin{cases} a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t) & (E) \\ y(t_0) = y_0 & t_0 \in I \\ y'(t_0) = v_0 & y_0, v_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (C.I.)$$

il faut trouver la solution, parmi l'infinité de soll. de (E), qui vérifie les deux C.I.

$$\text{ex.} \begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 18 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Théorème Le (P.C.) lin. d'ordre 2 à coeff. constants admet une unique sol.

Stratégie . On résout (E) en général ;
- on obtient une famille de soll. qui dépendent de deux constantes A, B
- Avec les 2 C.I on fixe la valeur de A et B.

Ex. 1