COMMENT DIAGONALISER UNE MATRICE 2×2 EN 6 ÉTAPES

Petits rappels de théorie Étant donnée une matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

1. A est *diagonale* si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$;
2. A est *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \Delta$, où Δ est diagonale.
3. $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un *vecteur propre* pour A, de *valeur propre* λ, si $Av = \lambda v$.

La recette Considérons par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique de A : c'est $p_A(x) = \det(A - xI_2)$. Ici
$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} \\ &= (1-x)^2 - 2 \cdot 2 = x^2 - 2x - 3. \end{aligned}$$
2. Valeurs propres de A : ce sont les racines de $p_A(x)$: ici
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+3},$$
donc nous avons $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$.
3. Les valeurs propres comment sont-elles ?
   (a) $\lambda_1,\ \lambda_2$ complexes conjuguées : A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$;
   (b) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ réelles : A est diagonalisable, et sa forme diagonale est $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$;
   (c) $\lambda_1 = \lambda_2$: A diagonalisable si et seulement si A est déjà diagonale (au départ) : il n'y a rien à ajouter.

   Ici, A est diagonalisable, et sa forme diagonale est $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Dans la suite, on s'intéressera au cas (b).
4. Vecteur propre v_1 de valeur propre λ_1 : c'est une solution *non nulle* du système $(A - \lambda_1 I_2)v_1 = 0$. Ici
$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$$

donc on peut prendre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Attention : il y a toujours une infinité de solutions, c-a-d une équation disparaît toujours, sinon il y a une erreur quelque part).

5. Vecteur propre v_2 de valeur propre λ_2 : ici

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x - y = 0$$

   donc on peut prendre $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. La matrice P est simplement la matrice qui a (dans l'ordre) v_1 et v_2 en colonne : ici

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   C'est fini, (si on a bien fait les calculs) $P^{-1}AP = \Delta$. Vérifiez si vous n'êtes pas sûrs ! Ici

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   et on peut vérifier à la main que

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$