

Exercice 1 Faire un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 2, des fonctions suivantes :

$$x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \sin(x), \quad x \mapsto \cos(x), \quad x \mapsto \tan(x),$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x}, \quad x \mapsto \ln(1-x), \quad x \mapsto \ln(1+x), \quad x \mapsto \sqrt{1+x}$$

Exercice 2 Faire un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 1, des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \arctan(x), \quad x \mapsto \sin(e^x - 1), \quad x \mapsto \frac{1 + 3x - 2x^2}{(x-1)^2}, \quad x \mapsto \frac{\sin(e^x - 1)}{x}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

Exercice 3 Faire un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 2, des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \sin(x) \cos(x), \quad x \mapsto 1 - \cos(x), \quad x \mapsto \sqrt{1-3x}, \quad x \mapsto \frac{-x}{1+5x},$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-2x}, \quad x \mapsto \frac{2}{1+5x}, \quad x \mapsto \ln(1+x^2), \quad x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

Exercice 4 1) Faire une représentation graphique, au voisinage de 0, de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \cos(x).$$

2) Si $f(x) = \arctan(x)$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis donner un développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0, puis au voisinage de 1.

Exercice 5 Calculer les limites suivantes, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin(x)}{x^2 + x^3}$$

Exercice 6 Calculer les limites suivantes, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{1 - \cos(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x) - 3x}{\ln(1+x) - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1 - x/2}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2}.$$