Exercice 1 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$. Trouver les points critiques de f, préciser s'il s'agit d'extrema locaux.

Exercice 2 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x + e^x y - y$. Trouver les points critiques de f. Préciser s'il s'agit d'extrema locaux.

Exercice 3 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{1} \frac{e^{-y}}{x\sqrt{x}} dxdy$.

Exercice 4 Calculer $\int_D f(x,y)\, d(x,y)$ pour les fonctions f et domaines D suivantes :

$$f(x,y) = x^2(2y+1), \quad D = [-1,1] \times [0,1]$$
$$f(x,y) = \sqrt{x+y}, \quad D = [0,1] \times [0,1]$$

Exercice 5 Calculer pour

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$
$$\int_D xy\, d(x,y)$$

Exercice 6 Calculer pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ xin[0,1], x \leq y \leq x^2\}$

$$\int_D x^2\, d(x,y)$$

Exercice 7 Calculer pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 - x \leq 0\}$

$$\int_D x\, d(x,y)$$

Exercice 8 Étudier les points critiques de fonctions

$$f(x,y) = 4xe^{-x^2-y^2} \quad g(x,y) = \tfrac{\cos(x)}{y^2+1} \quad h(x,y) = x^3 - xy + y^2$$
$$u(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6 \quad v(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y - 5$$

Exercice 9* Soient $X > 0$ et

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant X^2\right\} \qquad \text{et} \qquad \Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -X \leqslant x \leqslant X \text{ et } -X \leqslant y \leqslant X\right\}.$$

Calculer $I(X) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy$.
Soit $J(X) = \iint_\Delta e^{-(x^2+y^2)} dxdy$. Utiliser I pour donner un encadrement de $J(X)$.
En déduire $\lim_{X \to +\infty} J(X)$.

Exercice 10* Soit un réel q *fixé*, pour tout point M de coordonnées (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$, on définit $f(M) = \frac{q}{r}$ où $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.
Exprimer f comme une fonction de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{\nabla} f(x, y) = -\frac{q}{r^2} \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$.