Feuille 7 : Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$y' + 5y = 3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$,
$y' + 3y = 4e^x$ avec la condition initiale $y(0) = -2$,
$y' + y = xe^{-x} + 1$,
$3y' + 2y = x^3 + 6x + 1$,
$y' - y = \sin(x) + 2\cos(x)$,
$y' = 3y + \sin(3x)$,
$y' = 3y + \sin(3x) + \sin(2x)$.

Exercice 2

On considère une population formée de N individus et évoluant en fonction du temps $t > 0$.

1. Dans le modèle de Malthus, on suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus.
   a) Justifier que dans ce modèle N vérifie l'équation $\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = kN(t)$ pour une certaine constante k. On suppose désormais que N est dérivable. En déduire que $N'(t) = kN(t)$.
   b) Déterminer $N(t)$ si à l'instant $t = 0$ la population est de N_0 individus.
   c) Comment cette population évolue-t-elle lorsque t tend vers l'infini ?
2. Le modèle de Verhulst prend en compte le fait que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux k n'est plus constant mais proportionnel à la différence entre une population maximale N^* et la population à l'instant t. On a alors $k(t) = r(N^* - N(t))$ et N est solution de l'équation $N'(t) = rN(t)(N^* - N(t))$ (appelée équation logistique).
   a) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose $y(t) = \frac{1}{N(t)}$. Calculer N' en fonction de y et y'. Justifier que y est dérivable puis calculer N' en fonction de y et y'.
   b) Remplacer N' et N par leur expression en fonction de y' et y dans l'équation logistique et vérifier que y est solution de l'équation différentielle
   $$y' = r(1 - Ny).$$
   c) Résoudre l'équation précédente.
   d) En déduire que $N(t) = \frac{N^*}{1+Ke^{-rN^*t}}$ avec une constante réelle K.
   e) Comment cette population évolue-t-elle lorsque t tend vers l'infini ?

Exercice 3

Il existe des épidémies qui guérissent quasiment sans aucun effet d'immunisation (la tuberculose, par exemple). On considère deux groupes de personnes : des susceptibles $S(t)$ et des infectants $I(t)$. Si on suppose qu'il n'existe aucune phase latente (une phase latente est une période d'infection pendant laquelle on ne peut pas transmettre l'infection), alors $S(t) + I(t)$ est constant, d'où $S'(t) + I'(t) = 0$. Le changement des deux groupes est modélisé par une fonction f d'infection, on a donc $S' = -f(S, I)$ et par conséquent $I' = f(S, I)$. Il paraît logique d'avoir une proportionalité entre $f(S, I)$ et S et I d'où $f(S, I) = rSI$ avec un taux $r > 0$. La guérison s'effectue à un taux $a > 0$. On en déduit le modèle

$$\begin{cases} S'(t) &= -rS(t)\,I(t) + aI(t) \\ I'(t) &= rS(t)\,I(t) - aI(t) \end{cases}$$

avec des valeur initiales $S(0) = S_0$ et $I(0) = I_0$.

1. On pose $N = S_0 + I_0$. Montrer que les fonctions u et v, définies par $u(t) = S(t/a)/N$ et $v(t) = I(t/a)/N$ satisfont
   $$\begin{cases} u + v &\equiv 1 \\ u' &= -(Ru - 1)v \\ v' &= (Ru - 1)v \end{cases}$$
   avec des valeur initiales $u(0) = u_0 = \frac{S_0}{N}$ et $v(0) = v_0 = \frac{I_0}{N}$. Ici, $R = \frac{rN}{a}$ est en fait le nombre d'infections qu'un individu transmet pendant la phase d'infection en moyenne. *Indication* : dérivez les équations qui définissent u et v par rapport à t et utilisez les équations différentielless que satisfont S et I.
2. Montrer que v vérifie l'équation logistique $v' = ((R - 1) - Rv)v, \qquad v(0) = v_0$.
3. Utiliser les techniques de l'exercice précédent pour trouver une solution à cette équation. *Indication* : on pose $v^* = 1 - \frac{1}{R}$. Démontrer que
   $$v(t) = \frac{v_0 v^*}{v_0 + (v^* - v_0)\exp((1 - R)t)}$$

4. Discuter du comportement de la solution quand t tend vers l'infini en fonction de R.

Exercice 4

Pour les substances radioactives, des expériences ont montré qu'en l'absence d'apport extérieur, le taux de variation du nombre $Q(t)$ d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction Q est donc solution de l'équation différentielle $y' = -\mu y$ où μ est une constante propre à la substance radioactive.

1. On appelle temps de demi-vie pour une substance radioactive le temps T nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent. Trouver une relation reliant T et μ.
2. Pour le carbone-14, T est environ de 5730 ans, que vaut approximativement μ ?
3. L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique fait apparaître que l'arbre ne contient plus que 40% du carbone-14 qu'il contenait avant l'éruption. De quand date l'éruption si l'analyse a été effectuée en 2011 (penser à utiliser le temps de demi-vie du carbone-14).
4. Même question avec une analyse plus fine qui donne 42%.

Exercice 5

1. Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants :

$$y'(x) = x\,y(x) \qquad y'(x) = \frac{1}{x}\,y(x) \qquad y'(x) = x^2\,y(x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x^2}\,y(x) \qquad y'(x) = e^x y(x) \qquad y'(x) = \frac{x\,y(x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'(x) = \ln(x)\,y(x) \qquad y'(x) = \sin(x)\cos(x)\,y(x)$$

2. Déterminer les (uniques) solutions des problèmes de la question précédente vérifiant respectivement

$$y(0) = 1 \qquad y(1) = \pi \qquad y(1) = e$$

$$y(2) = 1 \qquad y(0) = e \qquad y(2) = 0$$

$$y(1) = 1 \qquad y(\tfrac{\pi}{2}) = 1.$$

Exercice 6

Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants :

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x) \qquad y'(x) + \cos(x)y(x) = 0 \qquad xy' + 3y = 0$$

Exercice 7

Déterminer les solutions des problèmes inhomogènes associés aux problèmes ci-dessus.

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x) + (x+1)^2\cos(x) \qquad y'(x) + \cos(x)y(x) = \sin(x)\cos(x) \qquad xy' + 3y = x^2$$

Exercice 8

Déterminer les solutions des problèmes inhomogènes suivants

$$(1+x^2)\,y'(x) - 2x\,y(x) = (1+x^2)^2 \qquad y'(x) + 2x\,y(x) = 2xe^{-x^2} \qquad y'(x) = x^2(1-y(x))$$

* Exercice 9

Les problèmes suivants sont de la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n$. La *méthode de Bernoulli* consiste à les réduire à des problème linéaires de première ordre en substituant $z(x) = y(x)^{1-n}$. Donnez la solution unique en utilisant cette méthode et précisez l'intervalle maximal d'existence.

$$\begin{cases} y'(x) &= y(x) + y(x)^2, \\ y(0) &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) - 2xy(x)^3 \\ 2y(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) &= xy(x)^2 + \frac{xy(x)}{1+x^2} \\ y(0) &= -3 \end{cases}$$