Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Pour alléger les notations, dans la suite on pose

$$\mathbf{r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = f_{xx}(a,b); \quad \mathbf{s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = f_{xy}(a,b); \quad \mathbf{t} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = f_{yy}(a,b) \ .$$

La formule de Taylor d'ordre 2 appliquée à f en (a,b) devient

$$f(a+x, b+y) = f(a,b) + f_x(a,b).x + f_y(a,b).y + \frac{1}{2}(r.x^2 + 2s.xy + t.y^2) + \circ(x^2+y^2).$$

Si le gradient de f en (a,b), $\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$ est nul, c'est-à-dire **si $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ est un point critique de f, alors**

$$\boxed{f(a+x,b+y) = f(a,b) + \frac{1}{2}(r.x^2 + 2s.xy + t.y^2) + \circ(x^2+y^2) = f(a,b) + \frac{1}{2}P(x,y) + \circ(x^2+y^2)}.$$

Trois cas se présentent alors, qui dépendent du comportement du polynôme $P(x,y)$ au voisinage de 0 (est-il positif ? négatif ? de signe non constant ?). Comme pour le discriminant des polynômes de degré 2 en une variable, on a une quantité qui détermine le comportement de P :

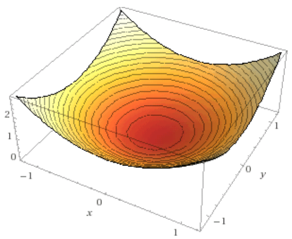
$$\mathbf{\Delta = rt - s^2}$$

1. $\mathbf{\Delta > 0}$ et $\mathbf{r > 0}$

• Alors au voisinage de $(0,0)$, P est positif et $f(a+x,b+y) = f(a,b) + \frac{1}{2}\overbrace{P(x,y)}^{\text{positif}} + \overbrace{\circ(x^2+y^2)}^{\text{négligeable}} \geq f(a,b)$. (a,b) est un **minimum local** de f.

• **Exemple générique, allure du graphe de f au voisinage de (a,b) :**

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2$$



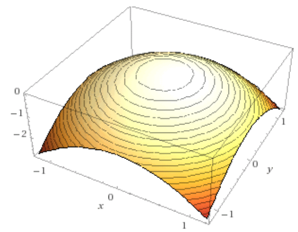
M0SE 1003 Les points critiques génériques.

2. $\mathbf{\Delta > 0}$ et $\mathbf{r < 0}$

• Alors au voisinage de $(0,0)$, P est positif et $f(a+x,b+y) = f(a,b) + \frac{1}{2}\overbrace{P(x,y)}^{\text{négatif}} + \overbrace{\circ(x^2+y^2)}^{\text{négligeable}} \leq f(a,b)$. (a,b) est un **maximum local** de f.

• **Exemple générique, allure du graphe de f au voisinage de (a,b) :**

$$(x,y) \mapsto -x^2 - y^2$$



3. $\mathbf{\Delta < 0}$

• Alors au voisinage de $(0,0)$, P change de signe et $f(a+x,b+y) = f(a,b) + \frac{1}{2}\overbrace{P(x,y)}^{\text{change de signe}} + \overbrace{\circ(x^2+y^2)}^{\text{négligeable}} \geq f(a,b)$. (a,b) n'est ni un maximum ni un minimum, c'est un **point col** ou **point selle** de f.

• **Exemple générique, allure du graphe de f au voisinage de (a,b) :**

$$(x,y) \mapsto x^2 - y^2$$