Programme du DS : jusqu'aux développement limités (formule de Taylor) 04/11/2013

NON : fonctions de 2 variables.

Dérivation : $\cos x + \sqrt{x}$, $e^x + \ln x$, $\sin x + \frac{1}{x}$

$\frac{\cos x + \ln x}{e^x}$, $\frac{\sin x + \sqrt{x}}{\ln x}$

$e^{\sqrt{x}}$, $\ln \cos x$, $\cos(\sqrt{x})$.

Intég. par chang. de variables :

changer ~~x~~ la variable : $x^2 = t$ $\quad x = \sqrt{t}$

$$\int_0^1 2x\, e^{x^2}\, dx$$

1. dans la fonction : $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$
2. dans les extrêmes $\longrightarrow \int_{x=0}^{x=1} 2x\, e^{x^2}\, dx$
3. dans le dx

$$= \int_{t=0}^{t=1} 2\sqrt{t}\, e^t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$$

$$= \int_0^1 e^t\, dt = \left[e^t\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{9}} \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$\sqrt{x} = t$

$x = t^2$

$dx = 2t\, dt$

attention aux signes !

$$= \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{2t}\, 2t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t\, dt = \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\frac{\pi}{3} - (-\cos 0)$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 e^x \sqrt{e^x + 3}\, dx =$$

$e^x = t$

$x = \ln t$

$dx = \frac{1}{t}\, dt$

$$= \int_{t=e^0}^{t=e^1} t\sqrt{t+3} \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \int_1^e \sqrt{t+3}\, dt$$

$$\left[\frac{(t+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^e = \frac{2}{3}\left((e+3)^{\frac{3}{2}} - (1+3)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left((e+3)\sqrt{e+3} - 8\right)$$

$t + 3 = u$

$t = u - 3$

$dt = du$

$$\int_4^{e+3} \underbrace{\sqrt{u}}_{= u^{\frac{1}{2}}}\, du = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{e+3} = \frac{2}{3}\left((e+3)^{\frac{3}{2}} - \underbrace{4^{\frac{3}{2}}}_{\|}\right)$$

$4\sqrt{4} = 8$

Intég. par parties :

Formule : f, g dérivables sur $]a,b[$, avec f', g' continues en $]a,b[$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, g'(t)\, dt = \Big[f(t)\, g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)\, g(t)\, dt}$$

$$\int_0^1 \underset{f}{x}\, \underset{g'}{e^x}\, dx = \Big[x\, e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x\, dx = e - 0 - \Big[e^x\Big]_0^1$$

$$= e - (e-1) = 1$$

$$\int_0^2 \log(1+x)\, dx = \int_0^2 \underset{(x)'}{1}\cdot \log(1+x)\, dx = \Big[x \log(1+x)\Big]_0^2 - \int_0^2 x \cdot \frac{1}{1+x}\, dx$$

$$= 2 \log 3 - 0 - \int_0^2 \frac{x}{x+1}\, dx$$

$$= 2 \log 3 - \int_0^2 \frac{x+1-1}{x+1}\, dx$$

$$= 2 \log 3 - \int_0^2 1\, dx + \int_0^2 \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$= 2 \log 3 - \Big[x\Big]_0^2 + \Big[\log(x+1)\Big]_0^2$$

$$\int_0^1 (x+1)^2 \cos x\, dx$$ = 2 fois par parties.

Développements limités $\quad f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad x_0 \in]a,b[$

à l'ordre 2 : f dérivable 2 fois en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right)$$

si $x_0 = 0$: $\quad f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2)$

exemple : $\qquad x_0 = 0$

$f(x) = \sin x + 2\cancel{\sqrt{}}x + e^x \qquad f(0) = 0 + 0 + 1$

$f'(x) = \cos x + 2 \cdot \cancel{\frac{1}{2\sqrt{x}}} + e^x \qquad f'(0) = 1 + 2 + 1 = 4$

$f''(x) = -\sin x + 0 + e^x \qquad f''(0) = -0 + 1 = 1$

$$\Longrightarrow f(x) = \underset{f(0)}{1} + \overset{f'(0)}{4}\, x + \frac{\overset{f''(0)}{1}}{2}\, x^2 + o(x^2)$$

Matrice inverse

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det M &= 2\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot(-1)\cdot 1 \\ &= 4 + 1 + 1 - 1 + 2 + 2 = 9 \neq 0 \end{aligned}$$

M inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{III} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \mathrm{II}+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \frac{1}{3}\mathrm{II} \\ \frac{1}{3}\mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}-2\mathrm{III} \\ \mathrm{II}+\mathrm{III} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{\begin{matrix}1&0&0\end{matrix}}}_{\mathbb{1}_3} \qquad \underbrace{\hphantom{\begin{matrix}1&0&0\end{matrix}}}_{M^{-1}}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifier que $MM^{-1} = \mathbb{1}_3$.

Diagonalisation :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \det(A - x\mathbb{1}_2) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ -1 & 4-x \end{pmatrix} = 4 - x - 4x + x^2 + 2 \\ &= x^2 - 5x + 6 \end{aligned}$$

valeurs propres :

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 = \lambda_1 \\ 3 = \lambda_2 \end{cases}$$

A diagonalisables, $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ etc.