

Pénalisation L2+L1 et Lagrangien augmenté en synthèse de Fourier

Application à la radio-héliographie par interférométrie

Jean – François GIOVANNELLI

Groupe Signal – Image

IMS (Université de Bordeaux – CNRS)

351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

Préalablement : Groupe Problèmes Inverses, Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS – Supélec – UPS)

Collaborateur : Alain COULAIS, Laboratoire d'Étude du Rayonnement de la Matière en Astrophysique, Observatoire de Paris

Journées BAMI – IMB
Mercredi 14 novembre 2012

PLAN

- Principe des mesures en interférométrie
- Modèle direct et problèmes d'inversion
 - Synthèse de Fourier, Interpolation – extrapolation, Déconvolution
- Inversion : généralités et bref historique
- Indétermination, information *a priori* et régularisation
 - Positivité et support
 - Sources ponctuelles sur fond homogène et modèle composite
- Aspects algorithmiques
- Résultats de traitements
 - Simulations
 - Données NRH
- Conclusions et extensions

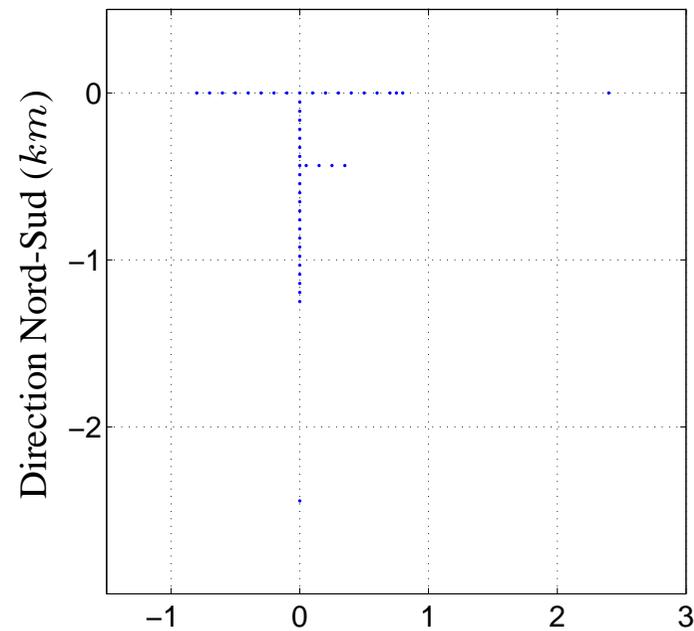
INTERFÉROMÉTRIE : PRINCIPES DE L'INSTRUMENT (1/2)

- Principe physique [THOMPSON, MORAN, SWENSON, 2001]
 - Réseau d'antennes \rightsquigarrow large ouverture
 - Bande de fréquence, *e.g.*, 164 MHz
 - Interférence entre deux antennes \rightsquigarrow une donnée dans le plan de Fourier



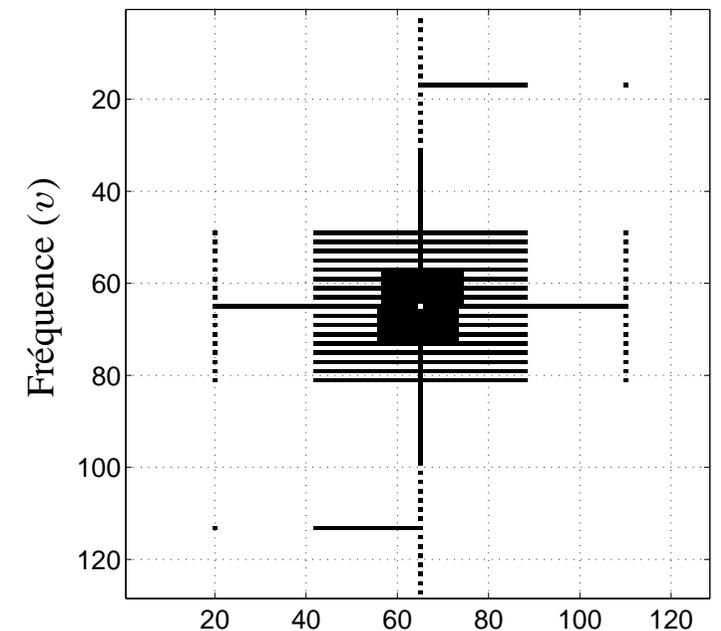
NRH

Positions des antennes



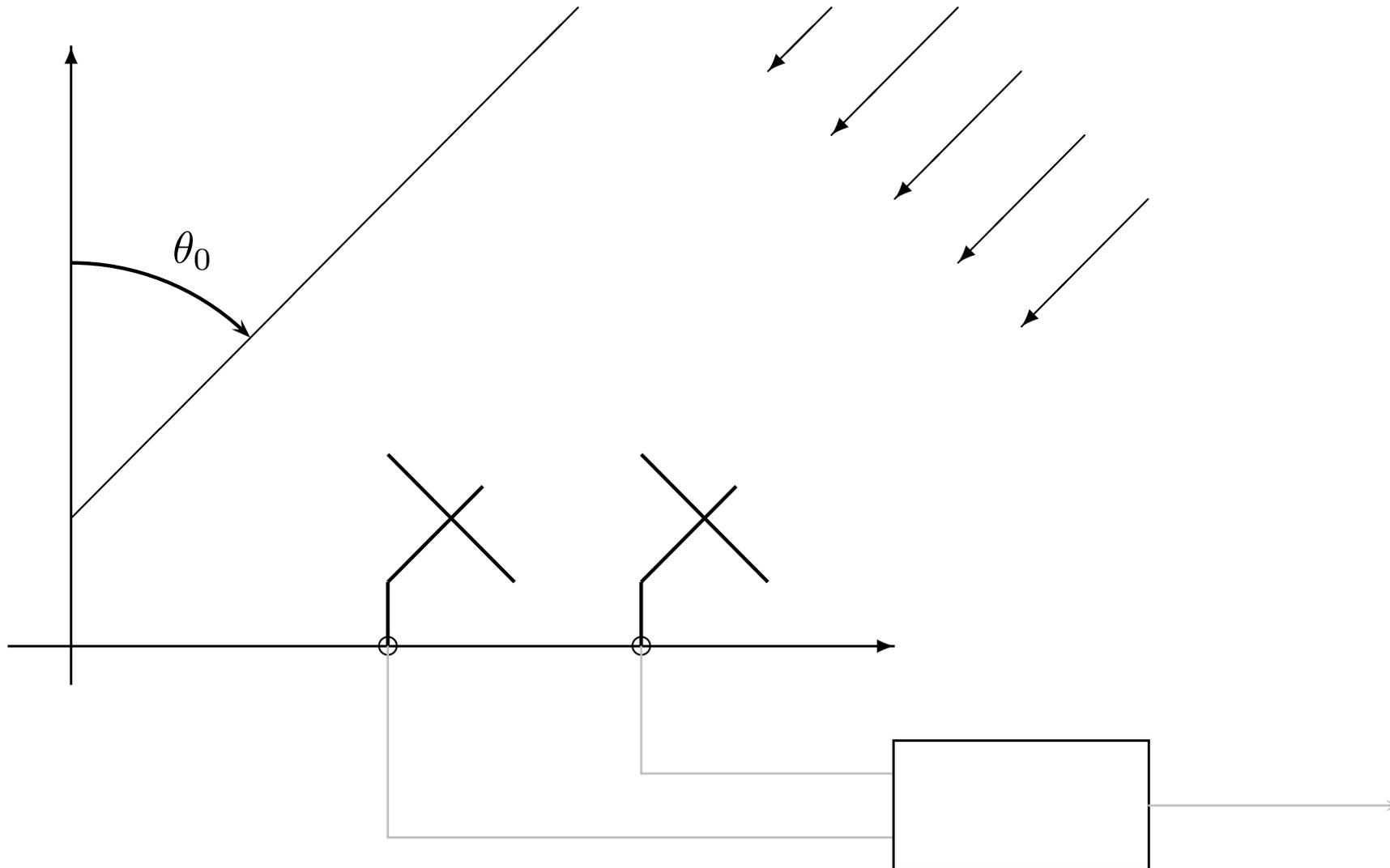
Direction Ouest-Est (km)

Remplissage du plan de Fourier



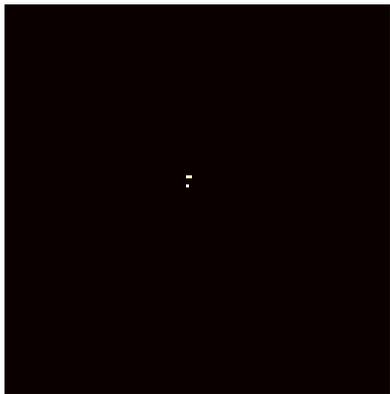
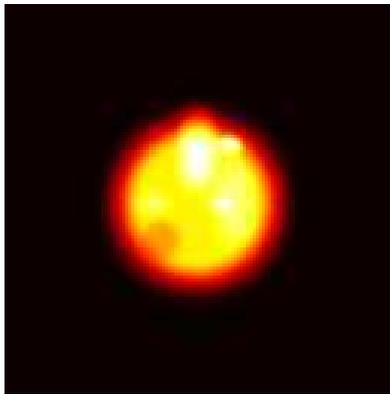
Fréquence (u)

INTERFÉROMÉTRIE : PRINCIPES DE L'INSTRUMENT (2/2)

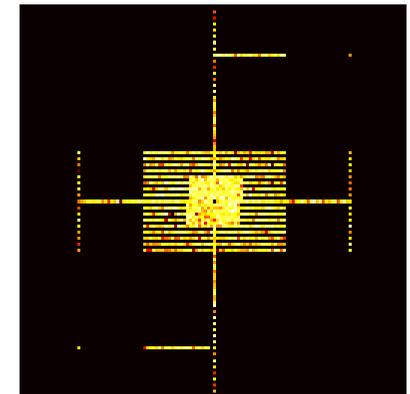
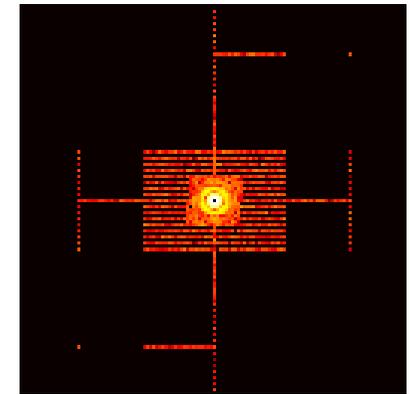
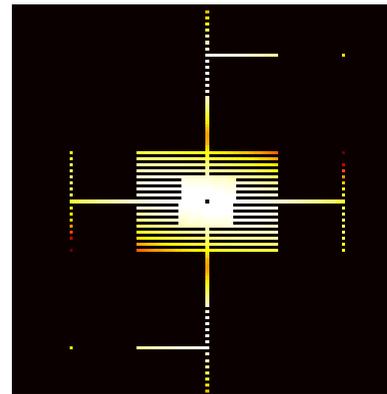
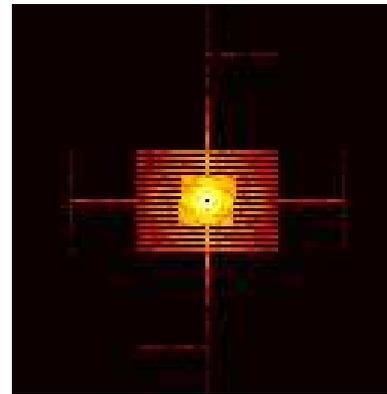
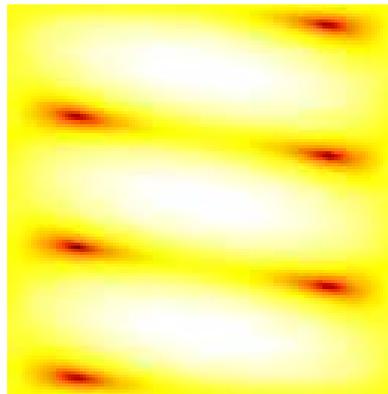
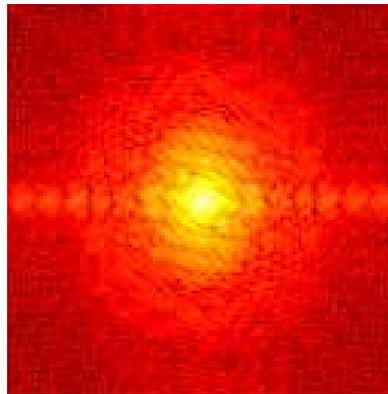


OBSERVATIONS TYPIQUES

- Source étendue : basse fréquence
- Sources impulsionnelles : large bande



Objet



Données

MODÈLE INSTRUMENT

● Transformée de Fourier tronquée bruitée

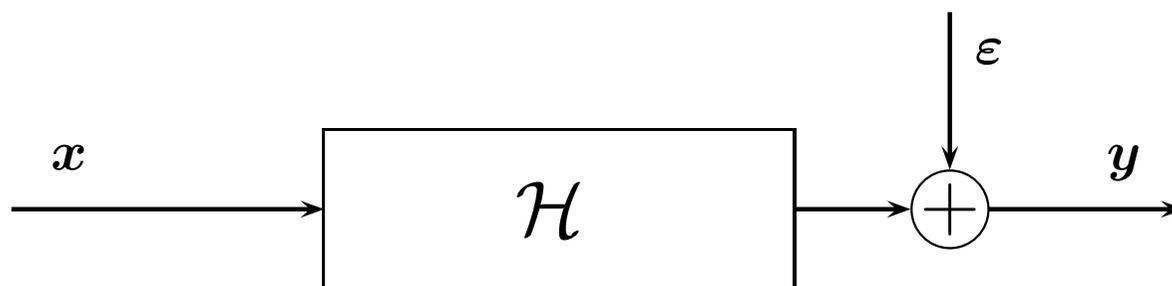
$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

● $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^N$: image inconnue

● $\mathbf{y}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{C}^M$: données mesurées, erreurs

● \mathbf{F} : matrice de Fourier ($N \times N$)

● \mathbf{T} : matrice de troncature ($M \times N$), e.g., $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



● Difficultés : $M \ll N$ (7% observé), aspect « bi », bruit (pas trop)

AUTRES FORMULATIONS

- Formulation initiale Fourier – spatial : $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$
- Quelques propriétés
 - $\mathbf{F}^\dagger \mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{F}^\dagger = \mathbf{I}_N$: orthonormalité
 - \mathbf{T}^\dagger : matrice de « bourrage », $M \rightsquigarrow N$
 - $\mathbf{T}\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{I}_M$ et $\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}$: matrice de projection, $N \rightsquigarrow N$
- Deux autres formulations : spatial – spatial et Fourier – Fourier
 - Changement de variable : $\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} \rightsquigarrow$ interpolation – extrapolation

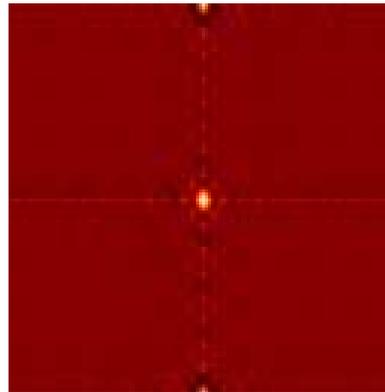
$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{T}\overset{\circ}{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

- Transformation des données : $\overset{\circ}{\mathbf{y}} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{T}^\dagger \mathbf{y}$ (carte sale)
- Transformation de l'opérateur : $\mathbf{H} = \mathbf{F}^\dagger \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}\mathbf{F}$ (lobe sale) \rightsquigarrow déconvolution

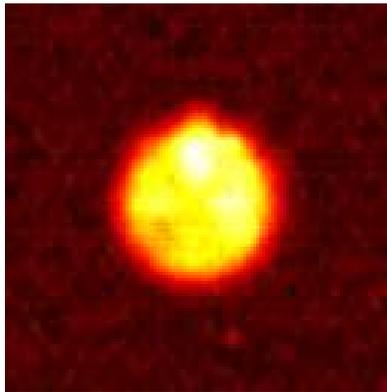
$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \longrightarrow \overset{\circ}{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

LOBE SALE – CARTE SALE

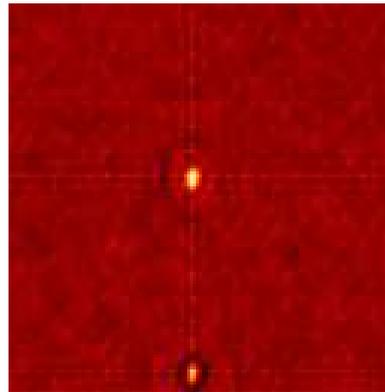
Lobe sale



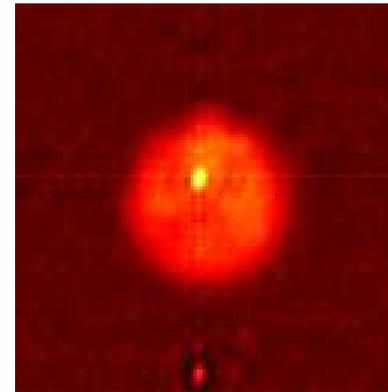
Carte sale



Carte sale



Carte sale



CARACTÈRE MAL POSÉ – INDÉTERMINATION

- Rang déficient, données manquantes

 - FT, T, H : 1 valeur singulière d'ordre M et 0 d'ordre $N - M$

- Pas de solution unique par moindres carrés

- $Q^{\text{MC}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{x}\|^2$

- Solution à norme minimale, autres solutions

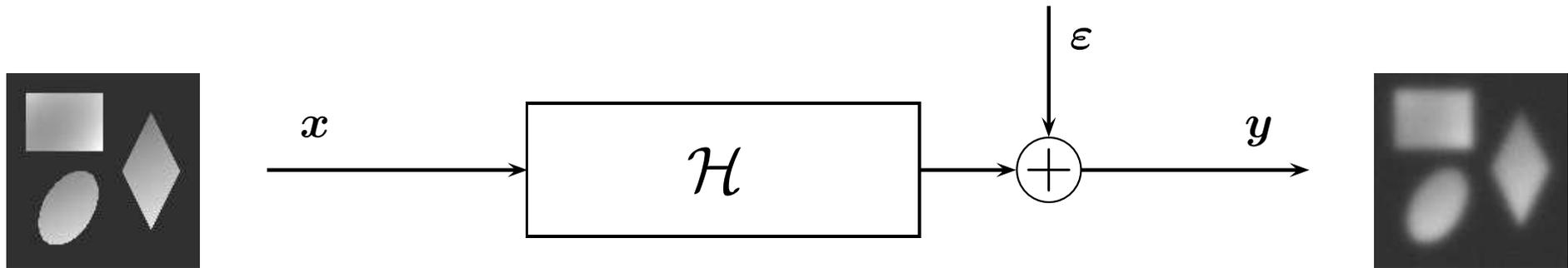
- $Q^{\text{MC}}(\overset{\circ}{\mathbf{y}}) = 0$

- $Q^{\text{MC}}\left(\overset{\circ}{\mathbf{y}} + [\mathbf{u} - \mathbf{F}^\dagger \mathbf{T}^t \mathbf{T} \mathbf{F} \mathbf{u}]\right) = 0$, pour toute carte \mathbf{u}

- Nécessité d'introduire d'autres informations

CONTEXTE SCIENTIFIQUE STANDARD

$$y = \mathcal{H}(x) + \varepsilon = \mathbf{H}x + \varepsilon = h \star x + \varepsilon$$

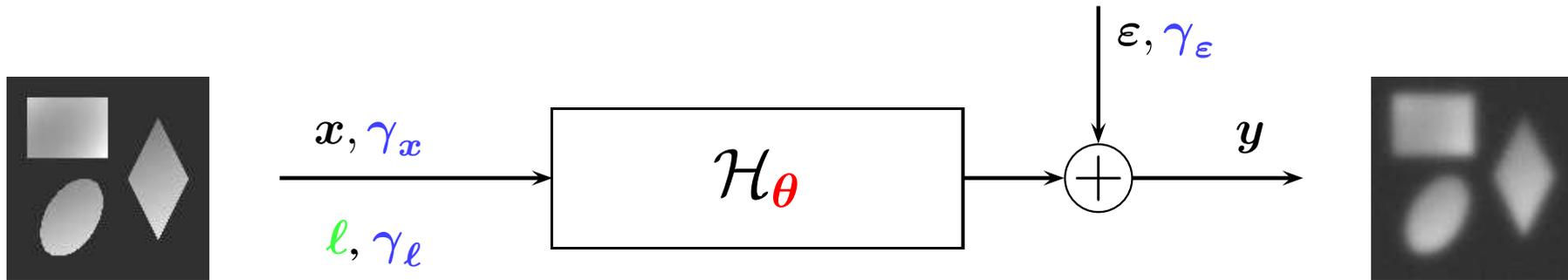


$$\hat{x} = \hat{\mathcal{X}}(y)$$

- Problématique : problèmes inverses mal-posés, *déficit en information*
- Méthodologie : régularisation, *compensation en information*
 - Spécificité des méthodes de reconstruction / restauration
 - Compromis et paramètres de réglage

QUESTIONS PLUS AVANCÉES

$$\mathbf{y} = \mathcal{H}(\mathbf{x}) + \varepsilon = \mathbf{H}\mathbf{x} + \varepsilon = \mathbf{h} \star \mathbf{x} + \varepsilon$$



$$\left[\hat{x}, \hat{\gamma}, \hat{\theta}, \hat{l} \right] = \hat{\mathcal{X}}(y)$$

● Sur-problèmes d'estimation

- Hyperparamètres, paramètres de réglage : *non-supervisé*
- Paramètres instruments (resp. réponse) : *myope* (resp. *aveugle*)
- Variable cachées : contours, régions, points singuliers, *etc...* : *augmenté*

PERSPECTIVE HISTORIQUE

- Approches quadratiques et filtrage linéaire ~ 60
 - Phillips, Twomey, Tikhonov
 - Kalman
 - Hunt (et Wiener ~ 40)
- Extension : variables cachées discrètes ~ 80
 - Kormylo & Mendel (Impulsions)
 - Geman & Geman (Lignes)
 - Besag, Graffigne, Descombes (Régions)
- Pénalisation convexe (variables cachées, aussi ...) ~ 90
 - $L_2 - L_1$, Huber, hyperbolique, Log-Cosh : Sauer, Blanc-Féraud, Idier...
 - L_1 : Alliney-Ruzinsky, Taylor ~ 79 , Yarlagadda ~ 85 ...
 - Et boum du $L_1 \sim 2000$
- Retour vers des modèles plus complexes ~ 2000
 - Et non-supervisé, myope, semi-aveugle, aveugle
 - Échantillonnage stochastique (MCMC, ...)

POSITIVITÉ ET SUPPORT

- Positivité

$$C_p : \forall p \in \mathcal{M}, \quad x_p \geq 0$$

- Support

$$C_s : \forall p \in \bar{\mathcal{S}}, \quad x_p = 0$$

- Gabarit (non exploré ici)

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad t_p^- \leq x_p \leq t_p^+$$

- Carte par défaut (non exploré ici)

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad x_p \sim m_p$$

SOURCE ÉTENDUE + SOURCES PONCTUELLES

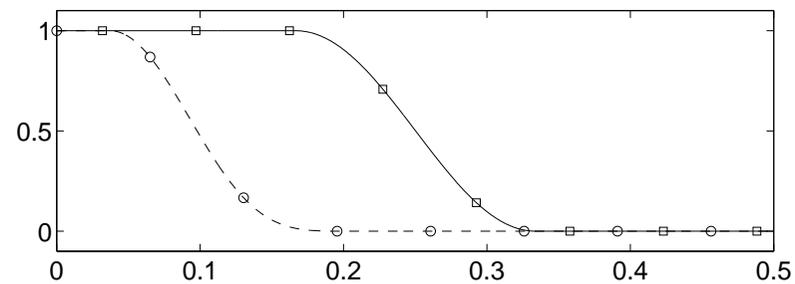
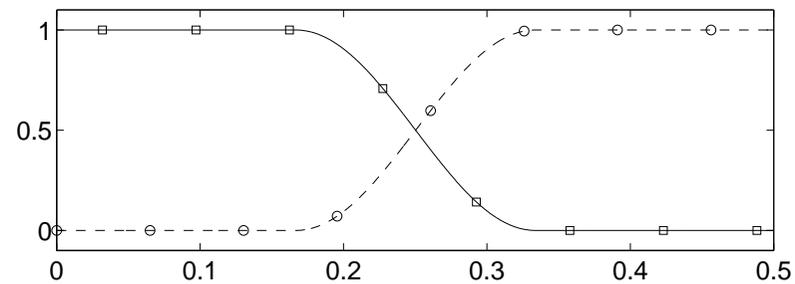
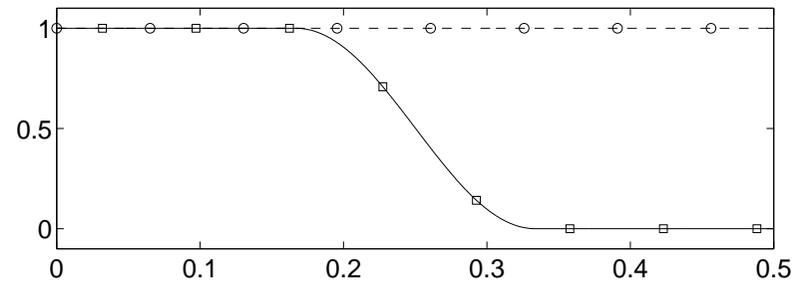
● Bi-modèle [CIUCIU 96, SAMSON 00] et [MAGAIN 98, PIRZKAL 00]

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \mathbf{x}_p$
- Modèle direct $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{F}(\mathbf{x}_e + \mathbf{x}_p) + \varepsilon$
- Nouvelles indéterminations

● Régularisation adaptée

- Régularité : $R_e(\mathbf{x}_e) = \sum_n [\mathbf{d}_n^t \mathbf{x}_e]^2 = \sum_{n \sim m} [x_e(n) - x_e(m)]^2$
 - Gauss-Markov, recomposition (ondelettes, dictionnaire, ...)
- Parcimonie : $R_p(\mathbf{x}_p) = \sum |x_p(n)| = \sum x_p(n)$
 - Blanc-Laplace, Blanc-Exponentiel

ANALYSE FRÉQUENTIELLE



Fréquence réduite

CRITÈRE ET SOLUTION RÉGULARISÉS

- Critère : pénalisé, quadratique, strictement convexe

$$\begin{aligned}
 Q^{\text{MCR}}(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_p) &= \|\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{F}(\mathbf{x}_e + \mathbf{x}_p)\|^2 + \lambda_e \sum [x_e(n+1) - x_e(n)]^2 + \lambda_p \sum x_p(n) \\
 &\quad + \varepsilon_e \sum x_e(n)^2 + \varepsilon_p \sum x_p(n)^2
 \end{aligned}$$

- Solution : *unique minimiseur sous contrainte*

$$(\widehat{\mathbf{x}}_e, \widehat{\mathbf{x}}_p) = \arg \min_{\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_p} \begin{cases} Q^{\text{MCR}}(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_p) \\ \text{s.c. } (C) \end{cases} = \arg \min_{\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_p} \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{q}^t \mathbf{x} \\ \text{s.c. } \begin{cases} x_p = 0 & \text{for } p \in \bar{\mathcal{S}} \\ x_p \geq 0 & \text{for } p \in \mathcal{M} \end{cases} \end{cases}$$

- Solution fonction des deux paramètres λ_e et λ_p

OPTIMISATION

- Optimisation quadratique avec contrainte linéaire
- Difficultés
 - $N \sim 130000$
 - Contrainte et variables liées
- Outils existants *garantis convergents* [BERTSEKAS 95,99 ; NOCEDAL 00,08 ; BOYD 04,11]
 - Gradient projeté, contraint
 - Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (L-BFGS) et *limited memory*
 - Points intérieurs
 - Descente coordonnée par coordonnée
 - Lagrangien augmenté, ADMM
 - Contraint mais non-liées + liées mais non-contraint
 - Solutions intermédiaires par FFT

LAGRANGIENS ET PÉNALISATION

- Contrainte égalité : $x_p = 0$

$$- \sum_{p \in \bar{\mathcal{S}}} \ell_p x_p + \frac{1}{2} c \sum_{p \in \bar{\mathcal{S}}} x_p^2$$

- Contrainte inégalité : $(x_p \geq 0) \rightsquigarrow (s_p - x_p = 0 ; s_p \geq 0)$

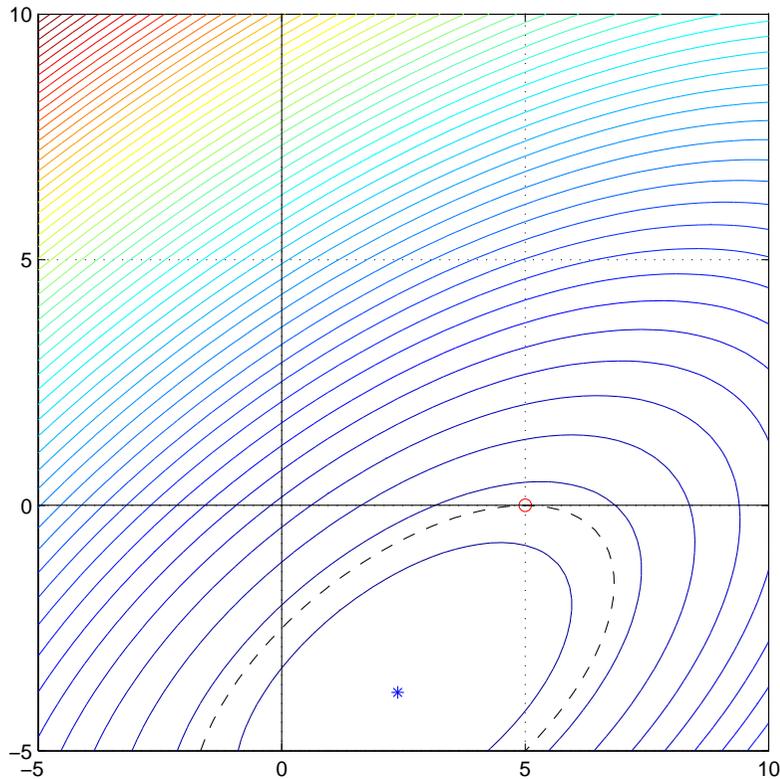
$$- \sum_{p \in \mathcal{S}} \ell_p (x_p - s_p) + \frac{1}{2} c \sum_{p \in \mathcal{S}} (x_p - s_p)^2$$

- Globalement

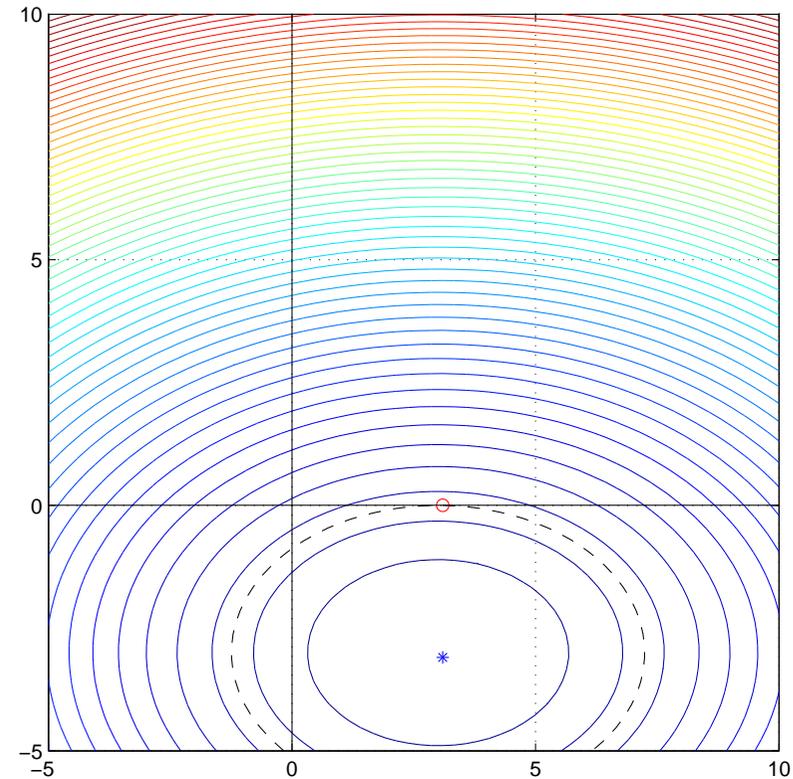
$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\ell}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{q}^t \mathbf{x} - \boldsymbol{\ell}^t (\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} c (\mathbf{x} - \mathbf{s})^t (\mathbf{x} - \mathbf{s})$$

OPTIMISATION CONTRAINTE : DIMENSION 2

● Deux variables : $\alpha_1(t_1 - \bar{t}_1)^2 + \alpha_2(t_2 - \bar{t}_2)^2 + \beta(t_2 - t_1)^2 + \gamma$



$$(\hat{t}_1; \hat{t}_2) \neq (\max[0, \bar{t}_1]; \max[0, \bar{t}_2])$$



$$(\hat{t}_1; \hat{t}_2) = (\max[0, \bar{t}_1]; \max[0, \bar{t}_2])$$

ALGORITHME ITÉRATIF

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\ell}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{q}^t \mathbf{x} - \boldsymbol{\ell}^t (\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \frac{1}{2} c (\mathbf{x} - \mathbf{s})^t (\mathbf{x} - \mathbf{s})$$

● Itérer trois étapes

① Unconstrained minimization of \mathcal{L} w.r.t. \mathbf{x}

$$\tilde{\mathbf{x}} = -(\mathbf{Q} + c\mathbf{I}_N)^{-1} (\mathbf{q} + [\boldsymbol{\ell} + c\mathbf{s}]) \quad (\equiv \text{FFT, Wiener})$$

② Minimization of \mathcal{L} w.r.t. \mathbf{s} , s.t. $s_p \geq 0$

$$\tilde{s}_p = \begin{cases} \max(0, cx_p - \ell_p)/c & \text{for } p \in \mathcal{S} \\ 0 & \text{for } p \in \bar{\mathcal{S}} \end{cases}$$

③ Update $\boldsymbol{\ell}$

$$\tilde{\ell}_p = \begin{cases} \max(0, \ell_p - cx_p) & \text{for } p \in \mathcal{S} \\ \ell_p - cx_p & \text{for } p \in \bar{\mathcal{S}} \end{cases}$$

PRÉCISIONS SUR Q ET q

● $q \rightsquigarrow$ carte sale :

$$q = \left. \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_e, x_p=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_e} \\ \frac{\partial J}{\partial x_p} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{y}} + \lambda_c \mathbf{1}/2 \end{bmatrix}$$

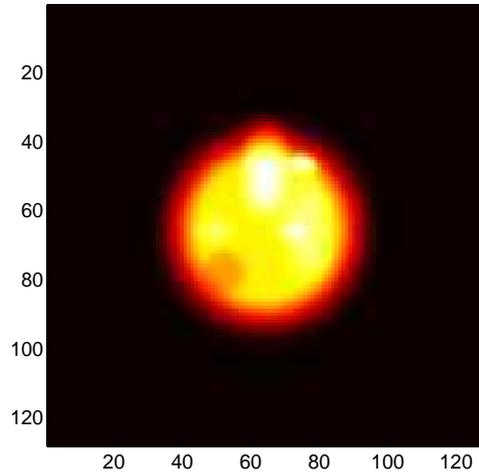
● $Q \rightsquigarrow$ lobe sale :

$$Q = \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial x_e^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial x_e \partial x_p} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial x_p \partial x_e} & \frac{\partial^2 J}{\partial x_p^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} + \lambda_s \mathbf{D}^t \mathbf{D} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & \mathbf{H} + \epsilon_s \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

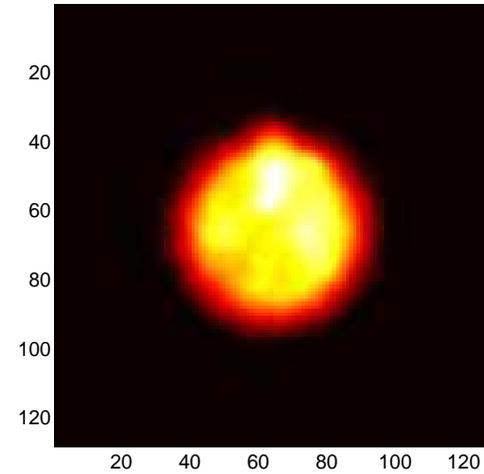
● ... et q et Q par FFT

DONNÉES SIMULÉES : RÉSULTATS

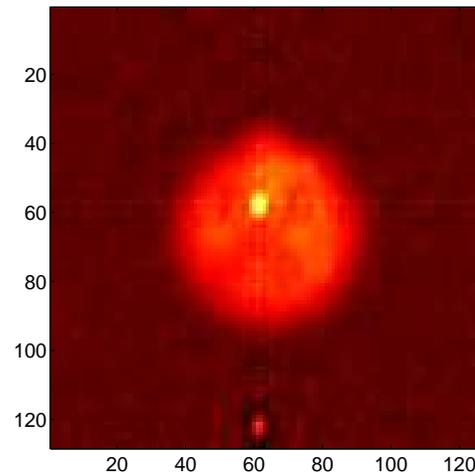
Objet étendu vrai \mathbf{x}_e



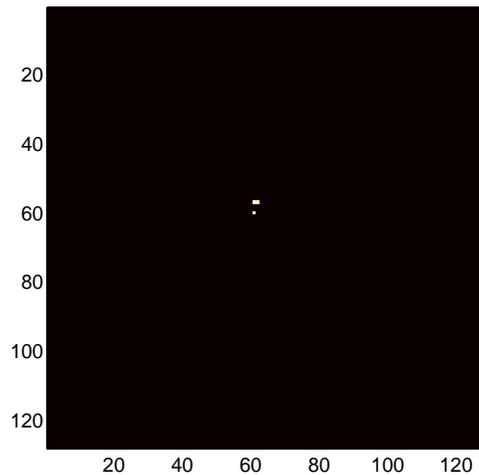
Objet étendu estimé $\widehat{\mathbf{x}}_e$



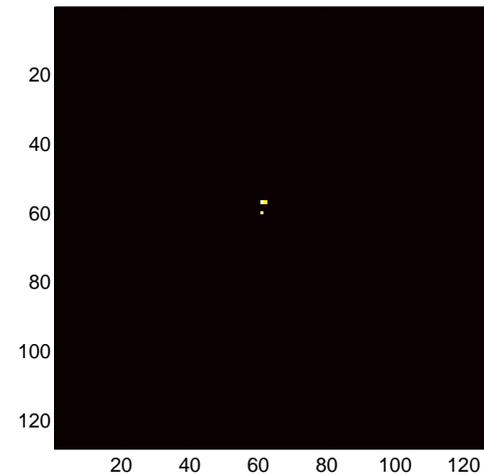
Carte sale



Objet ponctuel vrai \mathbf{x}_p

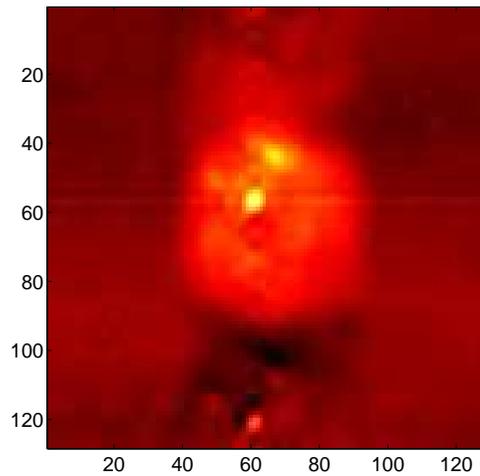


Objet ponctuel estimé $\widehat{\mathbf{x}}_p$

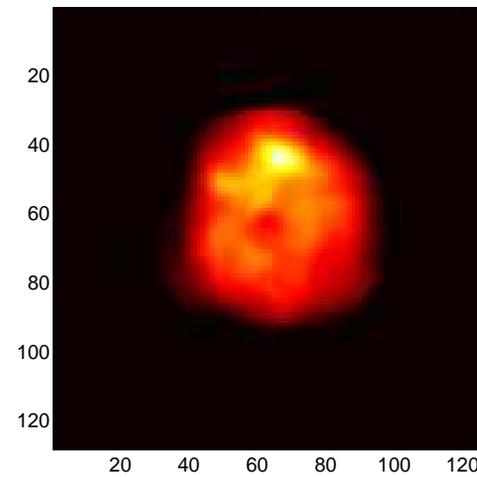


DONNÉES RÉELLES : PREMIERS RÉSULTATS

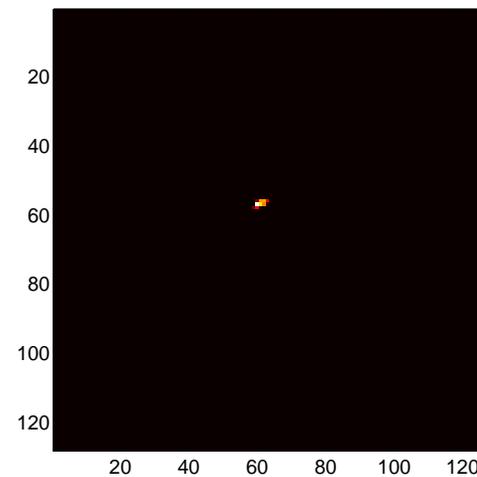
Carte sale



Objet étendu estimé \widehat{x}_e



Objet ponctuel estimé \widehat{x}_p



CONCLUSIONS

- Synthèse de Fourier en radioastronomie
 - Bi-modèle et régularisation adaptée : séparation fond / sources
 - Positivité et support
- Optimisation : lagrangiens augmenté, ADMM
- Simulations et données réelles
- Perspectives
 - Régularisation convexe non quadratique \rightsquigarrow résolution accrue du fond
 - Sources « hors grille » et sur-résolution
 - Données hors grille (fait en IRM)
 - Convexité large et unimodalité

 - Hyperparamètres, paramètres de réglage : *non-supervisé*
 - Paramètres instruments (gain, position) : *myope*
 - Variable cachées : contours, régions, points singuliers, *etc...* : *augmenté*