Restauration d'images

1 Introduction

Pour Matlab, une image de taille (m, n) est une matrice I de taille (m, n), et la valeur de $I(i, j)$ correspond à la valeur du niveau de gris de l'image au pixel (i, j).

Matlab est capable de lire a peu près tous les formats standards d'images.

On trouve des images au format *Matlab* dans le répertoire :

```
\Matlab\toolbox\matlab\demos
```

et des images au format *tiff* dans :

```
\Matlab\toolbox\images\imdemos
```

Exemples de visualisation :

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Chargement d'une image en Matlab:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
load gatlin2;
% -> L'image est chargee dans la variable X
%Autres images:
%load clown; load gatlin; load mandrill;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Visualisation:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
imagesc(X);
colormap gray;
%pour voir l'image en niveaux de gris
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Pour ouvrir une deuxieme figure:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(2);
colormap gray;
XX=imread('cameraman.tif');
imshow(XX);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

2 Discrétisation

Une image numérique, ou discrète, est un vecteur à deux dimensions de taille $N \times N$. On note X l'espace euclidien $\mathbb{R}^{N \times N}$, et $Y = X \times X$. On munit l'espace X du produit scalaire :

$$(u, v)_X = \sum_{1 \le i,j \le N} u_{i,j} v_{i,j} \tag{1}$$

et de la norme :

$$\|u\|_X = \sqrt{(u, u)_X} \tag{2}$$

Pour définir une variation totale discrète, on introduit d'abord une version discrète de l'opérateur gradient. Si $u \in X$, le gradient ∇u est un vecteur de Y donné par :

$$(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla u)^1_{i,j}, (\nabla u)^2_{i,j}) \tag{3}$$

avec

$$(\nabla u)^1_{i,j} = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{si } i < N \\ 0 & \text{si } i = N \end{cases} \tag{4}$$

et

$$(\nabla u)^2_{i,j} = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{si } j < N \\ 0 & \text{si } j = N \end{cases} \tag{5}$$

La variation totale discrète de u est alors donnée par :

$$J(u) = \sum_{1 \le i,j \le N} |(\nabla u)_{i,j}| \tag{6}$$

On introduit également une version discrète de l'opérateur divergence. On le définit par analogie avec le cadre continu en posant :

$$\mathrm{div} = -\nabla^* \tag{7}$$

où ∇^* est l'opérateur adjoint de ∇ : i.e., pour tout $p \in Y$ et $u \in X$, $(-\mathrm{div}\, p, u)_X = (p, \nabla u)_Y$. Il est aisé de vérifier que :

$$(\mathrm{div}\,(p))_{i,j} = \begin{cases} p^1_{i,j} - p^1_{i-1,j} & \text{si } 1 < i < N \\ p^1_{i,j} & \text{si i=1} \\ -p^1_{i-1,j} & \text{si i=N} \end{cases} + \begin{cases} p^2_{i,j} - p^2_{i,j-1} & \text{si } 1 < j < N \\ p^2_{i,j} & \text{si j=1} \\ -p^2_{i,j-1} & \text{si j=N} \end{cases} \tag{8}$$

Nous utiliserons aussi une version discrète de l'opérateur Laplacien définie par :

$$\Delta u = \mathrm{div}\, \nabla u \tag{9}$$

Programmer tous ces opérateurs. Pour vérifier vos implémentation, choisir une image, puis visualiser son gradient vertical, horizontal, la norme de son gradient, son laplacien.

3 Restauration de Tychonov

On considère le problème :

$$\inf_u \|f-u\|_X^2 + 2\lambda \|\nabla u\|_X^2 \tag{10}$$

3.1 Résolution par EDP

Calculer l'équation d'Euler-Lagrange associée.

Calculer alors le minimum de la fonctionnelle par une méthode de gradient à pas constant.

3.2 Résolution par transformée de Fourier

On rappelle que la TFD d'une image discrète $(f(m,n))$ $(0 \leq m \leq N-1$ et $0 \leq n \leq N-1)$ est donnée par $(0 \leq p \leq N-1$ et $0 \leq q \leq N-1)$:

$$\mathcal{F}(f)(p,q) = F(p,q) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) e^{-j(2\pi/N)pm} e^{-j(2\pi/N)qn} \tag{11}$$

et la transformée inverse est :

$$f(m,n) = \frac{1}{N^2} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} F(p,q) e^{j(2\pi/N)pm} e^{j(2\pi/N)qn} \tag{12}$$

On a de plus $\|\mathcal{F}(f)\|_X^2 = N^2 \|f\|_X^2$ et $(\|\mathcal{F}(f), \|\mathcal{F}(g))_X = N^2 (f,g)_X$.

Montrer que :

$$\|\mathcal{F}(\nabla f)\|^2 = \sum_{p,q} |\mathcal{F}(\nabla f)(p,q)|^2 = \sum_{p,q} 4\, |\mathcal{F}(f)(p,q)|^2 \left(\sin^2 \frac{\pi p}{N} + \sin^2 \frac{\pi q}{N}\right) \tag{13}$$

En utilisant l'identité de Parseval, en déduire que la solution u de (10) vérifie :

$$\mathcal{F}(u)(p,q) = \frac{\mathcal{F}(f)(p,q)}{1 + 8\lambda \left(\sin^2 \frac{\pi p}{N} + \sin^2 \frac{\pi q}{N}\right)} \tag{14}$$

Coder cette nouvelle version. Attention, avant d'effectuer la transformée de Fourier d'une image, il vaut mieux la prolonger par symmétrie.

4 Régularisation ϕ

4.1 Débruitage

On considère le problème :

$$\inf_u \|f-u\|_X^2 + \lambda \int \phi(|\nabla u|) \tag{15}$$

Calculer l'équation d'Euler-Lagrange associée.

Calculer le minimum par une méthode de descente de gradient.

Faire des tests avec : $\phi(t) = t$, $\phi(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\phi(t) = \log(1+t^2)$, $\phi(t) = 2\sqrt{1+t^2} - 2$.

Implémenter ensuite l'algorithme de régularisation semi-quadratique.

Tester les différents choix de fonctions ϕ en débruitage. Commentaires ?

4.2 Déconvolution

On considère le problème :

$$\inf_u \|f - Au\|_X^2 + \lambda \int \phi(|\nabla u|) \tag{16}$$

Même questions que précédemment (pour le applications numériques, on prendra pour A un noyau gaussien).