ÉQUATIONS DE RÉCURRENCE LINÉAIRE

1. Introduction

Dans ce texte, on s'intéresse aux suites vérifiant une équation de récurrence linéaire. Le paragraphe 2 étudie théoriquement l'ensemble des solutions d'une telle équation, et en particulier sa dimension. Les paragraphes 3 et 4 sont algorithmiques et se rapportent aux équations dont les coefficients sont polynomiaux. Le paragraphe 3 donne un algorithme pour en trouver les solutions polynomiales, et le paragraphe 4 un algorithme pour en trouver les solutions hypergéométriques, dans le cas où l'équation considérée est homogène.

2. L'anneau des suites

Soit K un corps de caractéristique nulle. On note $K^{\mathbb{N}}$ l'ensembles des suites $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes appartiennent à K. Muni de l'addition et de la multiplication terme à terme, $K^{\mathbb{N}}$ est un anneau. C'est aussi un K-espace vectoriel, et donc une K-algèbre. Cette algèbre n'est pas intègre.

On définit l'opérateur *shift* N en posant, pour toute suite y de $K^{\mathbb{N}}$, $Ny(n) = y(n+1)$. L'opérateur N et ses puissances sont des applications linéaires sur $K^{\mathbb{N}}$.

On appelle opérateur de récurrence linéaire sur $K^{\mathbb{N}}$ un opérateur de la forme

$$L = \sum_{k=0}^{r} a_k N^k,$$

où les a_k sont des éléments de $K^{\mathbb{N}}$. si a_0 et a_r sont non nuls, l'ordre de L est $\operatorname{ord} L = r$. Une équation de récurrence linéaire dans K^n est une équation de la forme

$$Ly = f,$$

où L est un opérateur de récurrence linéaire et où f est un élément de $K^{\mathbb{N}}$. Si $f = 0$, une telle équation est dite homogène. L'ensemble des solutions de $Ly = 0$ est un sous-espace vectoriel de $K^{\mathbb{N}}$ et l'ensemble des solutions de $Ly = f$ un sous espace affine de $K^{\mathbb{N}}$.

Un parallèle avec la théorie des équations différentielles pousse à espérer que l'espace des solutions d'une telle équation est de dimension r. Il n'en est rien, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 1. Soient $a = (1, 0, 1, 0, \dots)$, $b = (0, 1, 0, 1, \dots)$ et $L = aN + b$. Alors l'ensemble des solutions de $Ly = 0$ est de dimension infinie.

Exemple 2. Si maintenant $L = aN - 1$, l'ensemble des solutions de $Ly = 0$ est réduit à $\{0\}$.
Exemple 3. Soient $p(n) = (n-1)(n-4)(n-7)$, $q(n) = n(n-3)(n-6)$ et $L = pN - q$. Alors l'ensemble des solutions de $Ly = 0$ est de dimension 4, engendré par $(1, 0, 0, 0, \dots)$, $(0, 0, 1, 4/5, 0, 0, \dots)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 5/4, 0, 0, 0, \dots)$ et la suite y telle que $y(n) = (n-1)(n-4)(n-7)$.

On essaie d'établir un cadre où la dimension de l'espace solution serait l'ordre de l'équation de récurrence. Dans les deux premiers exemples donnés, la suite a contient une infinité de 0. On éliminera ce cas. Dans le troisième exemple, trois des éléments de la base donnée n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls. Cela suggère d'identifier de telles suites à 0.

Ainsi, on définit $\mathcal{S}(K)$ comme le quotient de $K^{\mathbb{N}}$ par la relation d'équivalence $\sim$ sur $K^{\mathbb{N}}$ définie par $a \sim b$ s'il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $a(n) = b(n)$ pout tout n supérieur à n_0. Cela revient en fait à poser $\mathcal{S}(K) = K^{\mathbb{N}}/J$, où

$$J = \bigcup_{k=0}^{\infty} \ker N^k.$$

Grâce au théorème de factorisation des applications linéaires, on peut voir qu'il existe un unique automorphisme E de $\mathcal{S}(K)$ tel que $\varphi N = E\varphi$, où φ désigne la projection canonique de $K^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}(K)$. Par souci de simplification, on écrira N pour E et a à la place de sa classe $a + J$, pour toute suite a de $K^{\mathbb{N}}$.

Proposition 2.1. *Un élément non nul de $\mathcal{S}(K)$ est inversible si et seulement s'il n'est pas un diviseur de 0. Un tel élément est alors aussi appelé unité de $\mathcal{S}(K)$.*

On peut maintenant démontrer que les équations de récurrence linéaire sur $\mathcal{S}(K)$ ont la propriété recherchée.

Théorème 2.2. *Soit $L = \sum_{k=0}^{r} a_k N^k$ un opérateur de récurrence linéaire d'ordre r sur $\mathcal{S}(K)$. Si a_0 et a_r sont des unités de $\mathcal{S}(K)$, alors* $\dim \ker L = r$.

Preuve. Montrons d'abord que $\dim \ker L \leq r$. Pour cela, on considère $r+1$ éléments $y_1, \dots, y_{r+1}$ de $\ker L$. On va montrer que ces éléments sont nécessairement linéairement dépendants. Comme $Ly_i = 0$ pour tout i, alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=0}^{r} a_k(n) y_i(n+k) = 0$$

pour tout i. Soit $Y(n)$ l'élément de K^{r+1} égal à $(y_1(n), \dots, y_{r+1}(n))$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Soient $\mathfrak{L}_n$ l'espace vectoriel engendré par $Y(n), \dots, Y(n+r-1)$ et $\mathcal{O}_n = \{u = (u_1, \dots, u_{r+1}) \in K^{r+1} \ : \ \sum_{i=1}^{r+1} u_i v_i = 0 \ \forall v = (v_1, \dots, v_{r+1}) \in \mathfrak{L}_n\}$. Alors $\mathcal{O}_n$ est un sous espace vectoriel de K^{r+1} tel que $1 \leq \dim \mathcal{O}_n \leq r+1$ pour tout n. Comme a_0 est une unité, il existe un entier M tel que $a_0(n) \neq 0$

pour tout n supérieur ou égal à M. Soit $j = \max\{n_0, M\}$. Pour tout n supérieur ou égal à j,

$$y_i(n) = -\sum_{k=1}^{r} \frac{a_k(n)}{a_0(n)} y_i(n+k)$$

pour tout i. Donc, si $n \geq j$, $Y(n)$ appartient à $\mathfrak{L}_{n+1}$. Il suit que $\mathfrak{L}_n \subset \mathfrak{L}_{n+1}$ et que $\mathcal{O}_{n+1} \subset \mathcal{O}_n$ dès que $n \geq j$. Ainsi, la suite $(\mathcal{O}_n)_{n \geq j}$ est une suite décroissante d'espaces vectoriels de dimensions finies et supérieures ou égales à 1. On peut alors démontrer que l'intersection de ces espaces vectoriels est non triviale, ce qui implique que les y_i sont linéairement dépendants.

Montrons maintenant que $\dim \ker L \geq r$. On va pour cela exhiber une famille de r éléments linéairement indépendants de $\ker L$. Comme a_0 et a_r sont des unités, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $a_0(n)$ et $a_r(n)$ sont non nuls pour tout $n \geq n_0$. Soit $v(0), \dots, v(r-1)$ une base de K^r, où $v(j) = (v_1(j), \dots, v_r(j))$ pour tout j dans $\{0, \dots, r-1\}$. On définit $y_1, \dots, y_r$ dans $\mathcal{S}(K)$ en posant, pour tout i dans $\{1, \dots, r\}$: $y_i(n_0+j) = v_i(j)$ pour tout j dans $\{0, \dots, r-1\}$ et

$$y_i(j) = -\sum_{k=0}^{r-1} \frac{a_k(j-r)}{a_r(j-r)} y_i(j-r+k) \quad \text{pour} \quad j \geq n_0 + r.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $Y(n) = (y_1(n), \dots, y_r(n))$, $\mathfrak{L}_n$ l'espace vectoriel engendré par $Y(n), \dots, Y(n+r-1)$, et $\mathcal{O}_n = \{u = (u_1, \dots, u_r) \in K^r : \sum_{i=1}^{r} u_i w_i = 0 \ \forall w = (w_1, \dots, w_r) \in \mathfrak{L}_n\}$. Alors $\mathfrak{L}_{n_0} = K^r$ et donc $\mathcal{O}_{n_0} = \{0\}$. Or, comme précédemment, $\mathcal{O}_{n+1} \subset \mathcal{O}_n$ pour tout $n \geq n_0$. On en déduit que les y_i sont linéairement indépendants. □

Définition 2.3. *Une suite a de $\mathcal{S}(K)$ est dite polynomiale sur K s'il existe un polynôme p dans $K[x]$ tel que $a(n) = p(n)$ pour presque tout n de $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire : l'ensemble des éléments n de $\mathbb{N}$ tels que $a(n) \neq p(n)$ est fini). Elle est dite rationnelle sur K s'il existe une fonction rationnelle r de $K(x)$ telle que $a(n) = r(n)$ pour presque tout n de $\mathbb{N}$. Elle est dite hypergéométrique sur K s'il existe des suites p et q polynomiales sur K telles que $pNa + qa = 0$.*

Toute suite polynomiale est rationnelle, et toute suite rationnelle non nulle est hypergéométrique. De plus, toute suite rationnelle non nulle est une unité.

Proposition 2.4. *Soient a et y des éléments de $\mathcal{S}(K)$ tels que $y \neq 0$ et $Ny = ay$. Alors a et y sont des unités.*

Corollary 2.5. *Toute suite hypergéométrique est une unité.*

3. Solutions polynomiales

Ce paragraphe donne un algorithme qui donne toutes les solutions polynomiales d'une équation $Ly = f$ à coefficients polynomiales. C'est-à-dire :

$$L = \sum_{i=0}^{r} p_i(n) N^i,$$

où les p_i sont des suites polynomiales sur K et où p_0 et p_r sont non nulles. Alors, pour que cette équation ait des solutions polynomiales, la suite f doit également être polynomiale. On le suppose donc dans la suite du paragraphe.

On peut résoudre ce problème en trouvant d'abord une borne supérieure B pour le degré de polynômes solutions de l'équation, puis en décrivant les polynômes solutions qui ont un degré inférieur à B par la méthode des coefficients indéterminées..

Pour obtenir B, on réécrit L en termes de $\Delta = N - 1$. On obtient

$$L = \sum_{j=0}^{r} q_j \Delta^j \quad \text{où} \quad q_j = \sum_{i=j}^{r} \binom{i}{j} p_i.$$

Soit $y = \sum_{k=0}^{d} a_k n^k$ (où $a_d \neq 0$ et où les a_k sont dans K) une solution. On note $k^{\underline{j}}$ la "factorielle tombante" $k^{\underline{j}} = k(k-1)\dots(k-j+1)$. Alors le coefficient dominant de $q_j \Delta^j y(n)$ est égal à $\mathrm{cd}(q_j) a_d d^{\underline{j}}$. Soit

$$b = \max_{0 \leq j \leq r} (\deg q_j - j).$$

Alors $\deg Ly(n) \leq d + b$. Si $d + b < 0$, alors $d \leq -b - 1$. Sinon, le coefficient de n^{d+b} dans $Ly(n)$ est

$$a_d \sum_j \mathrm{cd}(q_j) x^{\underline{j}},$$

où la somme est prise sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des entiers j tels que $0 \leq j \leq r$ et $\deg q_j - j = b$. Si $\deg Ly(n) = d + b$, alors $d + b = \deg f$. Sinon, le coefficient de n^{d+b} s'annule, et donc d est une racine du polynôme

$$\alpha(x) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \mathrm{cd}(q_j) x^{\underline{j}}.$$

On obtient donc le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soit y est une solution polynomiale de l'équation $Ly = f$. Soit d_1 la plus grande solution entière de l'équation $\alpha(x) = 0$ (si cette équation n'a pas de solution entière, $d_1 = -\infty$). Alors*

$$\deg y \leq \max\{\deg f - b, -b - 1, d_1\}.$$

4. Solutions hypergéométriques

Soit F un corps de caractéristique nulle et K une extension de F. Étant donnée un opérateur de récurrence linéaire L à coefficients polynomiaux sur F, on cherche les solutions de l'équation

$$Ly = 0 \tag{1}$$

qui sont hypergéométriques sur K. On va ici décrire une méthode pour les équations d'ordre 2, qui se généralise aux ordres supérieurs. Nous utiliserons le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soit r une fonction rationnelle non nulle sur K. Alors il existe des polynômes a, b, c de $K[x]$ tels que b et c sont unitaires et*

$$r(x) = \frac{a(x)}{b(x)}\frac{c(x+1)}{c(x)},$$

où

1. *$pgcd(a(x), b(x+h)) = 1$ pour tout entier positif ou nul h,*
2. *$pgcd(a(x), c(x)) = 1$,*
3. *$pgcd(b(x), c(x+1)) = 1$.*

On considère donc la récurrence

$$p(n)y(n+2) + q(n)y(n+1) + r(n)y(n) = 0. \tag{2}$$

Soit y une solution hypergéométrique de (2). Alors il existe une suite rationnelle S telle que $y(n+1) = S(n)y(n)$. En substituant dans (2), on obtient

$$p(n)S(n+1)S(n) + q(n)S(n) + r(n) = 0.$$

On peut écrire

$$S(n) = z\frac{a(n)}{b(n)}\frac{c(n+1)}{c(n)},$$

où a, b et c sont unitaires et satisfont aux conditions (1), (2) et (3) du théorème 4.1. Alors

(3)

$$z^2p(n)a(n+1)a(n)c(n+2)+zq(n)b(n+1)a(n)c(n+1)+r(n)b(n+1)b(n)c(n) = 0.$$

On peut alors démontrer que $a(n)$ divise $r(n)$ et $b(n+1)$ divise $p(n)$. Cela laisse un ensemble fini de candidats pour $a(n)$ et $b(n)$: les facteurs unitaires de $r(n)$ et $p(n-1)$. On peut diviser (3) par $a(n)b(n+1)$. Il vient

$$z^2\frac{p(n)}{b(n+1)}a(n+1)c(n+2) + zq(n)c(n+1) + \frac{r(n)}{a(n)}b(n)c(n) = 0. \tag{4}$$

Pour déterminer la valeur de z, on considère le coefficient dominant du membre de gauche de cette équation : z satisfait une équation de degré inférieure ou égale à 2. Ainsi, a et b étant donnés, il y a au plus 2 choix pour z. Pour un choix donné de a, b, z, on utilise l'algorithme du paragraphe précédent pour déterminer les solutions polynomiales c de (4), s'il en existe. Si c'est le cas, et si c est une telle solution, alors on en déduit une solution hypergéométrique de (1). On trouve ainsi toutes les solutions hypergéométriques de cette équation.

Exemple 1. La solution générale de l'équation

$$(n-1)y(n+2) - (n^2+3n-2)y(n+1) + 2n(n+1)y(n) = 0.$$

est égale à $y(n) = C2^n + Dn!$.

Exemple 2. On peut montrer que

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

satisfait la récurrence

$$(n+2)^3 y(n+2) - (2n+3)(17n^2+51n+39)y(n+1) + (n+1)^3 y(n) = 0.$$

Grâce à l'algorithme précédent, on peut montrer que $y(n)$ n'est pas hypergéométrique.

Exemple 3. Soit $i(n)$ le nombre d'involutions sur un ensemble de cardinal n. Alors

$$i(n) = i(n-1) + (n-1)i(n-2).$$

Plus généralement, soit $i_r(n)$ le nombre de permutations sur un ensemble de cardinal r qui ne contient pas de cycles de longueur strictement supérieure à r. Alors

$$i_r(n) = \sum_{k=1}^{r} (n-1)^{\underline{k-1}}\, i_r(n-k).$$

Pour $r \geq 2$, le terme i_r n'est pas hypergéométrique. En particulier,

$$i(n) = \sum_k \frac{n!}{(n-2k)!2^k k!}$$

n'est pas hypergéométrique.

Références.

$A = B$, M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger.
Mathématiques concrètes, R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik.