

TAS DE SABLE

1. INTRODUCTION

Ce texte aborde le modèle du tas de sable, qui décrit un processus d'éboulements sur un graphe dont les sommets sont garnis de grains de sable. Dans ce modèle, un événement local se produisant sur un sommet peut se répercuter partout dans le graphe, ce qui illustre le proverbe issu de phénomènes chaotiques que les modèles continus de la physique ne peuvent expliquer : "un battement d'aile de papillon en Mer de Chine peut provoquer un tremblement de terre en Europe". Ce genre de modèle peut être utilisé par exemple dans l'étude des tremblements de terre, des feux de forêts, des fluctuations boursières etc.

Dans ce cadre, on observe que certains états se distinguent des autres. On les appelle ici des configurations récurrentes. De plus, on peut munir l'ensemble de ces configurations récurrentes d'une loi de groupe définie de façon naturelle à partir d'éboulements.

2. L'AUTOMATE CELLULAIRE DU TAS DE SABLE

2.1. Cas de la grille. Soit une grille rectangulaire de $n \times p$ cellules, c'est-à-dire un tableau rectangulaire à $n \times p$ entrées. Sur chaque cellule est déposé un certain nombre de grains de sables. On définit un processus dont les règles sont les suivantes.

- Si une case possède 4 grains de sables ou plus, alors cette case perd 4 grains de sable et en donne un à chacun de ses voisins (à gauche, à droite, en haut et en bas).
- Si cette case se trouve sur un bord (resp. dans un angle) de la grille, alors un (resp. deux) grains tombent dans le vide. Ces grains sont alors perdus.

La figure 1 illustre le fonctionnement de cet automate sur une grille 3×3 .

3	2	1	3	3	1	4	3	1	0	4	1	1	0	2
3	4	0	4	0	1	0	2	1	2	2	1	2	3	1
3	3	2	3	4	2	5	0	3	1	1	3	1	1	3

FIG. 1. Exemple de fonctionnement de l'automate du tas de sable

2.2. Extension au cas des graphes. Un graphe est un ensemble fini de points appelés sommets, ou nœuds, dont certains sont reliés entre eux par des liens appelés arêtes.

Dans toute la suite, tous les graphes considérés seront connexes.

Soit $G = (S, E)$ un graphe où $S = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble de ses sommets et où $E(i, j)$ désigne le nombre d'arêtes entre les sommets x_i et x_j . Pour tout sommet x_i , on note d_i son degré, c'est-à-dire le nombre d'arêtes partant de x_i .

On distingue l'un des sommets, mettons le sommet x_0 . Ce sommet sera appelé puits. Il reçoit les grains de sables, mais ne s'éboule jamais.

La règle de l'automate cellulaire dans ce cadre est la suivante.

- Si un sommet $i \neq 0$ contient au moins d_i grains de sables, alors il s'éboule.

- Un sommet i qui s'éboule perd d_i grains de sables et en donne $E(i, j)$ au sommet j .

On appelle configuration u sur le graphe G un n -uplet (u_1, \dots, u_n) de \mathbb{Z}^n . On dit que la configuration est positive si $u_i \geq 0$ pour tout i . Dans ce cas, la configuration représente le graphe où u_i grains de sable sont placés sur le sommet i .

La configuration Δ_i est le n -uplet $(\Delta_{i,1}, \dots, \Delta_{i,n})$ tel que $\Delta_{i,i} = d_i - E(i, i)$ et $\Delta_{i,j} = -E(i, j)$ si $i \neq j$. Ainsi, l'éboulement de la configuration u du sommet i donne la configuration $v = u - \Delta_i$.

2.3. Finitude des éboulements et unicité de l'état final. Dans ce paragraphe, nous allons voir qu'étant donnée une configuration, on atteint après un nombre fini d'éboulements un état stable, c'est-à-dire une configuration à partir de laquelle il n'y a plus d'éboulements. Nous verrons ensuite que cet état ne dépend pas de l'ordre où les éboulements ont été effectués.

Proposition 2.1. *Soit G un graphe muni d'un puits et u une configuration positive sur G . Alors le nombre d'éboulements possibles à partir de u est fini. C'est-à-dire, au bout d'un temps t fini, le système atteint une configuration où chaque sommet a un nombre de grains de sables strictement inférieur au degré de ce sommet.*

Pour montrer cette proposition, on peut supposer par l'absurde qu'il existe une suite infinie d'éboulements possibles à partir de la configuration, et voir que S_t , le nombre total de grains à l'instant t sur l'ensemble des sommets qui s'éboulent une infinité de fois, est strictement décroissant pour une infinité de t et ne peut-être croissant strictement que pour un nombre fini de t .

Définition 2.2. *Soit u une configuration sur un graphe $G = (S, E)$. Soit $s = (s_1, \dots, s_t)$ un élément de S^t , où $t \in \mathbb{N}$. s est une suite valide d'éboulements de u si à partir de u , on peut ébouler le sommet s_1 , puis le sommet s_2 et ainsi de suite jusqu'au sommet s_t . C'est-à-dire que pour u , le sommet s_1 est instable, puis qu'après éboulement de s_1 , le sommet s_2 est instable, et ainsi de suite jusqu'à s_t .*

Proposition 2.3. *Il existe un état stable et un seul atteint depuis une configuration positive u sur un graphe G par une suite valide d'éboulements. De plus, toutes les suites valides d'éboulements pour atteindre cette configuration se déduisent l'une de l'autre par permutation.*

La preuve de cette proposition repose sur le fait que si i et j sont deux sommets instables pour une configuration u , alors on arrive à la même configuration si l'on éboule i puis j , ou bien si l'on éboule j , puis i .

Définition 2.4. *Soit u une configuration positive. Alors nous noterons \hat{u} la configuration stable obtenue après éboulements à partir de la configuration u .*

3. CONFIGURATIONS RÉCURRENTES

Dans cette partie, nous verrons que certaines configurations stables se distinguent naturellement des autres, suivant certains critères liés aux chaînes de Markov : les configurations récurrentes. Il s'agit des configurations qui apparaissent une infinité de fois dans un processus que nous allons décrire.

Définition 3.1. *Soient u et v deux configurations positives sur un graphe. On notera $u \longrightarrow v$ si l'on peut passer de u à v par éboulement d'un sommet.*

Nous noterons $\hat{\longrightarrow}$ la cloture transitive de \longrightarrow . C'est-à-dire : $u \hat{\longrightarrow} v$ s'il existe $u_1 = u, u_2, \dots, u_t = v$ tels que pour tout i dans $\{1, \dots, t-1\}$, $u_i \longrightarrow u_{i+1}$.

Soit $u + v$ la configuration obtenue en ajoutant terme à terme les coordonnées de u et de v . on note $u \oplus v = \widehat{u + v}$.

Proposition 3.2. *Si u, u', v, v' sont des configurations positives, si $u \hat{\longrightarrow} v$ et si $u' \hat{\longrightarrow} v'$, alors $u + v \hat{\longrightarrow} u' + v'$. On a donc la relation $u \oplus v = \widehat{\hat{u} + \hat{v}}$.*

Il y a plusieurs façons équivalentes de définir les configurations récurrentes. Nous présentons la définition "markovienne", qui intervient naturellement dans le cadre de la simulation de phénomènes physiques, puis nous verrons d'autres caractérisations possibles, dites par éboulements.

3.1. Caractérisation markovienne. Nous définissons un processus sur les configurations stables de la manière suivante. Soit u une configuration stable. On tire un sommet du graphe distinct du puits de façon aléatoire, puis on ajoute un grain de sable sur ce sommet et on éboule la configuration jusqu'à obtenir une configuration stable.

En itérant ce processus, on obtient une suite de configurations stables.

Théorème 3.3. *En itérant le processus défini ci-dessus, l'ensemble des configurations atteignables une infinité de fois ne dépend pas de la configuration de départ u . Un élément de cet ensemble est appelé configuration récurrente. Une configuration stable qui n'est pas récurrente est appelée transitoire.*

Preuve. Soit u la configuration de départ, et soit v une configuration stable qui apparaît une infinité de fois dans la chaîne des $u^{(i)}$ obtenue avec certains tirages. Soit w une configuration stable quelconque, il faut démontrer que

pour certains tirages, et en partant de la configuration w , on peut atteindre la configuration v une infinité de fois. Pour cela, il suffit de voir que v est atteinte au moins une fois, et donc de trouver une configuration β telle que $w \oplus \beta = v$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ telle que $v \oplus \alpha = v$. Une telle configuration positive existe. Il suffit pour s'en convaincre de considérer ce qui se passe entre deux occurrences de v dans la chaîne partant de u . Il existe i tel que $\alpha_i > 0$. Soit $d = \max_{j=1}^n d_j$. Dans la configuration $(d+1)\alpha$, le sommet x_i a au moins $d+1$ grains. Si on éboule une fois le sommet x_i , on obtient une configuration Φ_i où le sommet x_i et les sommets voisins de x_i ont au moins un grain. Si ensuite on éboule une fois les sommets voisins de x_i dans $(d+1)\Phi_1$, on obtient Φ_2 où les sommets situés à une distance inférieure à 2 de x_i ont au moins un grain. En itérant le procédé, on obtient une configuration Φ_l où tous les sommets contiennent au moins un grain, et telle que $v + d\Phi_l \xrightarrow{\hat{}} v$. Alors $\beta = v + d\Phi_l - w$ est une configuration positive telle que $w + \beta \xrightarrow{\hat{}} v$. \square

3.2. Caractérisations par éboulements. Soit $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ la configuration telle que $\delta_i = d_i - 1$ pour tout i .

Proposition 3.4. *Une configuration stable u est récurrente si et seulement s'il existe une configuration positive v non nulle telle que $\delta + v \xrightarrow{\hat{}} u$.*

Proposition 3.5. *Soient u une configuration récurrente et v une configuration positive. Alors $u \oplus v$ est récurrente.*

Soit $\varepsilon = \delta + (\delta - \delta \oplus \delta)$. On remarque que $\varepsilon_i > 0$ pour tout sommet de degré supérieur strictement à 1.

Proposition 3.6. *Une configuration stable u est récurrente si et seulement si $u + \varepsilon \xrightarrow{\hat{}} u$.*

Pour le montrer, on peut voir tout d'abord que $\delta + \varepsilon \xrightarrow{\hat{}} \delta$, et utiliser la proposition 3.4.

4. LE GROUPE DES CONFIGURATIONS RÉCURRENTES

Le corollaire 3.5 permet de voir que \oplus définit une loi interne pour l'ensemble $\text{SP}(G, x_0)$ des configurations récurrentes sur le graphe G muni du puits x_0 . Cet ensemble est en fait un groupe abélien pour \oplus isomorphe à $\mathbb{Z}^n / \mathcal{E}$, où \mathcal{E} est le sous-groupe de \mathbb{Z}^n engendré par les Δ_i . On peut en effet démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soit u une configuration de \mathbb{Z}^n . Alors il existe une unique configuration récurrente v telle que $u - v \in \mathcal{E}$.*

Preuve. Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence sur \mathbb{Z}^n définie par \mathcal{E} . Alors $\varepsilon \mathcal{R} 0$. Soit u dans \mathbb{Z}^n . On peut construire u' positive telle que $(\delta + u') \mathcal{R} u$, en utilisant ε . Cela prouve l'existence.

Pour l'unicité, soient u et v deux configurations récurrentes telles que $u \mathcal{R} v$. Si $u - v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta_i$, alors $u - \sum_{\alpha_i < 0} \alpha_i \Delta_i = v + \sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i \Delta_i$. Toujours en

utilisant ε , on peut construire des configurations positives u' , v' et w telles que $u' \xrightarrow{\varepsilon} u$, $v' \xrightarrow{\varepsilon} v$, $w \xrightarrow{\varepsilon} u'$ et $w \xrightarrow{\varepsilon} v'$, relations qui permettent de montrer que $u = v$.

Soit β la configuration qui contient $E(i, \text{puits})$ grains sur le sommet x_i . Alors β permet de donner une caractérisation pratique des configurations récurrentes.

Proposition 4.2. *Soit u une configuration positive. Alors u est récurrente si et seulement si $u \oplus \beta = u$. De plus, lors du passage de $u + \beta$ à u , chaque sommet s'éboule une et une seule fois.*

Cela vient du fait que $\beta \mathcal{R} 0$.

Exemple.

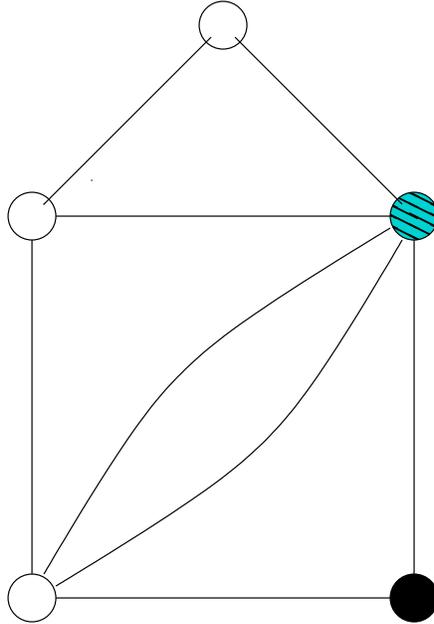


FIG. 2. Le graphe de la maison

La figure 2 représente le graphe de la maison. Si le puits est le sommet en noir, on compte 120 configurations stables sur ce graphe et 31 configurations récurrentes. Si le puits est le sommet rayé, on compte 48 configurations stables et 31 configurations récurrentes.

Proposition 4.3. *L'élément neutre pour $SP(G, x_0)$ est $e = \delta \oplus (\delta - (\delta \oplus \delta))$. Soit u une configuration récurrente. Alors l'opposée de u dans $SP(G, x_0)$ est $e \oplus (\delta - (\delta \oplus u))$.*

Pour décrire le groupe $SP(G, x_0)$, on peut utiliser la matrice M définie par $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$ où $m_{i,j} = \Delta_{i,j}$. Alors, la forme normale de Smith

S de M donne les diviseurs élémentaires de $\text{SP}(G, x_0)$, son déterminant est égal au cardinal de $\text{SP}(G, x_0)$ et si $UMV = S$, les vecteurs colonnes de U^{-1} permettent d'exhiber une famille de générateurs de $\text{SP}(G, x_0)$.

On peut se demander ce que devient $\text{SP}(G, x_0)$ si on change de puits. En fait, sa structure reste inchangée.

Théorème 4.4. *Soit G un graphe de sommets x_0, \dots, x_n . Alors pour tout i , $\text{SP}(G, x_0) \simeq \text{SP}(G, x_i)$.*

Preuve. On définit des configurations Γ_i comme les Δ_i , mais sur \mathbb{Z}^{n+1} au lieu de \mathbb{Z}^n . C'est-à-dire, si $(e_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ désigne la base canonique de \mathbb{Z}^{n+1} pour $i \in \{0, \dots, n\}$, alors pour ces entiers i , on pose $\Gamma_i = d_i e_i - \sum_{j=0}^n E(i, j) e_j$. Le groupe $\text{SP}(G, x_0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{n+1}/\Gamma(G, x_0)$, où $\Gamma(G, x_0) = \langle e_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \rangle$. Comme $\sum_{i=1}^n \Gamma_i = -\Gamma_0$, on peut écrire que $\Gamma(G, x_0) = \langle e_0, \Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \rangle$. Si l'on pose $\Gamma'_i = \Gamma_i + E(i, n) e_0$, $f_n = -e_0$ et $f_i = e_i - e_n$ pour tout i dans $\{0, \dots, n-1\}$, alors on peut voir que pour tout i différent de n , $\Gamma'_i = d_i f_i - \sum_{j=0}^n E(i, j) f_j$ et $\Gamma'_n = -\sum_{j=0}^n E(n, j) f_j$. Comme $\Gamma(G, x_0) = \langle f_n, \Gamma'_0, \dots, \Gamma'_n \rangle$, on en déduit le résultat. \square

5. SUGGESTIONS

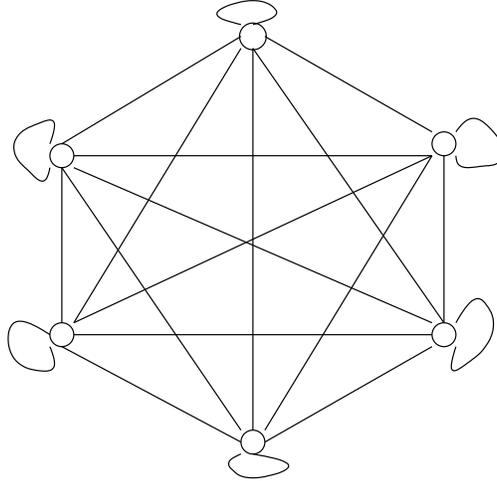


FIG. 3. Graphe complet à 6 sommets

Illustrer sur ordinateur le processus d'éboulements.

Les preuves données dans ce textes ne sont qu'ébauchées. On peut chercher à en détailler certaines. On peut aussi chercher à démontrer certaines affirmations données sans preuve.

On peut illustrer les différents objets définis dans le texte sur des exemples de graphe, comme celui des grilles, de la maison, des graphes complets (voir la figure 3), des roues (figure 4), ou encore d'autres exemples. Qu'est-ce que

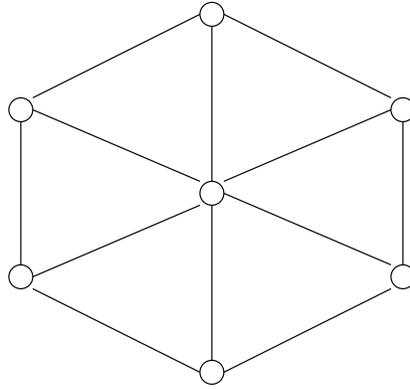


FIG. 4. Roue à 6 sommets

l'élément neutre, sur un exemple donné ? Quelle est la liste des configurations récurrentes ? Quelle est la structure du groupe ? On peut aussi en donner des générateurs.