Université Bordeaux 1 — **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**

Mathématiques — Année 2016–2017

Devoir Surveillé, 9 novembre 2016
Durée 1h30. Documents interdits.

Exercice 1 – Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1) Résoudre $AX = B$, déterminer une matrice de permutation P telle que PA puisse s'écrire sous la forme $PA = LU$ et expliciter cette décomposition.

2) Calculer $\det A$.

Exercice 2 – Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{spec} A = \{0\}$. On veut démontrer qu'il existe une suite (B_k) d'éléments de $M_n(\mathbb{C})$ semblables à A qui converge vers 0.

1) Soit T une matrice triangulaire supérieure semblable à A. Que peut-on dire des coefficients diagonaux de T ?

2) Soit $D = \operatorname{diag}(1, 2^{-1}, \dots, 2^{1-n})$. On pose $B_k = D^{-k}TD^k$. Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$. Pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, on note t_{ij} (resp. b_{kij}) le coefficient (i,j) de T (resp. B_k). Exprimer b_{kij} en fonction de t_{ij} et k.

3) Montrer que la suite (B_k) converge vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Exercice 3 – Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On suppose que pour tout i, le coefficient a_{ii} est non nul. On décompose $A = D + L + U$, où D est diagonale, L triangulaire inférieure, U triangulaire supérieure et où les coefficients diagonaux de L et de U sont nuls. On rappelle les faits suivants.

(1) La matrice d'itération pour la méthode de Gauss-Seidel est égale à $G = -(D+L)^{-1}U$.

(2) Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. La méthode de relaxation $\mathcal{R}_\omega$ issue de la méthode de Gauss-Seidel pour le paramètre ω a pour matrice d'itération $R_\omega = (D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)$.

(3) Si A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Gauss-Seidel converge quelque soit le vecteur initial choisi.

On suppose que A est à diagonale strictement dominante et que $\omega \in]0,1]$. Cet exercice a pour but de démontrer que dans ce cas, la méthode de relaxation $\mathcal{R}_\omega$ converge quelque soit le vecteur initial choisi (résultat énoncé en cours, mais non démontré).

1) Pourquoi peut-on dire que ce résultat est vrai dans le cas où $\omega = 1$?

On supposera dorénavant que $\omega \in]0,1[$. Soit λ une valeur propre de R_ω. On suppose par l'absurde que $\lambda \geqslant 1$. Soit P le polynôme caractéristique de R_ω. On note $L' = D^{-1}L$ et $U' = D^{-1}U$.

2) Montrer que $P(\lambda) = \det\left((\lambda + w - 1)I + \lambda\omega L' + \omega U'\right)$.

3) Justifier pourquoi $\lambda + \omega - 1 \neq 0$ et montrer que
$$P(\lambda) = (\lambda + \omega - 1)^n \det\left(I - \alpha L' - \beta U'\right)$$
où
$$\alpha = \frac{\lambda\omega}{\lambda + \omega - 1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\omega}{\lambda + \omega - 1}.$$
4) On pose $\lambda = a e^{i\theta}$ où $a \in [1, +\infty[$. Montrer que
$$|\alpha|^2 = \frac{a^2\omega^2}{(a\cos\theta + \omega - 1)^2 + a^2 \sin^2\theta}.$$
5) Montrer que $|\beta| \leqslant |\alpha| \leqslant 1$.

6) En déduire que $P(\lambda) \neq 0$, et expliquer pourquoi ce résultat est absurde.

7) En déduire que $\rho(R_\omega) < 1$ et conclure.