	ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017 **Examen première session** **PARCOURS : LIMA 5032** **Code UE : N1MA5032** **Epreuve : Mathématiques** **Date : 13/12/2016** **Heure : 14h30** **Durée : 3h** Documents : Non autorisés. Epreuve de M. Jehanne	**Collège Sciences et technologies**

Exercice 1

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que S_n est symétrique définie positive et déterminer sa décomposition de Cholesky.

Exercice 2

Soit $||.||$ une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On appelle conditionnement de A relativement à $||.||$ le nombre réel

$$\mathrm{cond}(A) = ||A||.||A^{-1}||.$$

1. Montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A)$.
2. Montrer que si $||.||$ est une norme subordonnée, alors $||I|| = 1$. En déduire que $\mathrm{cond}(A) \geq 1$ pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit cond_2 le conditionnement relatif à la norme matricielle subordonnée à $||.||_2$. Montrer que si $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{cond}_2(Q) = 1$.
4. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\Delta B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soient enfin X et $X + \Delta X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$AX = B \quad \text{et} \quad A(X + \Delta X) = B + \Delta B.$$

Montrer que

$$\frac{||\Delta X||}{||X||} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{||\Delta B||}{||B||}$$

(c'est une majoration de l'erreur relative obtenue sur la solution de l'équation $AX = B$ en fonction de l'erreur relative commise sur le vecteur B).

Exercice 3

Soient A et B deux matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$.
1. Montrer que $A + B$ est positive.
2. On suppose A définie positive. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et C symétrique positive telles que $A + B = {}^tP(I_n + C)P$.
3. En déduire que si A est définie positive, $\det A + \det B \leq \det(A + B)$.
4. On ne suppose plus que A est définie positive, mais on suppose toujours qu'elle est positive. Pour tout entier k strictement positif, on définit $A_k = A + \dfrac{1}{k}I$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq K$, alors A_k est définie positive. Montrer que l'inégalité $\det A + \det B \leq \det(A + B)$ est encore vérifiée.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul. Soient $r_1, \dots, r_n$ des nombres réels. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & \dots & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_1 \\ r_{k-1} & \dots & r_1 & 1 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad R_k = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix} \in M_{k,1}(\mathbb{R}).$$

Ainsi, le coefficient (i, j) de T_k est égal à $r_{|i-j|}$, où $r_0 = 1$. On suppose que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, la matrice T_k est définie positive. Soit le système

$$T_n X = -R_n. \tag{1}$$

1. Rappeler sans démonstration la complexité algébrique de la résolution d'un système de taille n par la méthode du pivot de Gauss.
La suite de l'exercice porte sur un algorithme plus efficace pour la résolution du système (1).
2. Pour tout entier k, on note E_k la matrice de $M_k(\mathbb{R})$ dont le coefficient (i, j) est égal à $(E_k)_{i,j} = \delta_{i,k+1-j}$. Ainsi :

$$E_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout (i, j), exprimer le coefficient (i, j) de $E_k T_k$ et de $T_k E_k$ en fonction des r_l et conclure que $E_k T_k = T_k E_k$.
3. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On suppose que l'on a trouvé un vecteur colonne X de $M_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$T_k X = -R_k$$

et on cherche à résoudre le système de taille $k + 1$

$$\begin{pmatrix} T_k & E_k R_k \\ {}^t R_k E_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_k \\ -r_{k+1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

où les inconnus sont $Y \in M_{k,1}(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$.

Soit donc $\begin{pmatrix} Y \\ t \end{pmatrix}$ la solution de (2). Montrer que

$$Y = X + t E_k X \quad \text{et} \quad (1 + {}^t R_k X) t = -r_{k+1} - {}^t R_k E_k X.$$

4. Calculer $({}^t X E_k, 1) T_{k+1} {}^t({}^t X E_k, 1)$ et montrer que $1 + {}^t R_k X \neq 0$.
5. En déduire un algorithme de complexité algébrique $O(n^2)$ pour résoudre (1).
6. En utilisant cet algorithme, résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$