Université Bordeaux 1 **Licence 3 - Algorithmique algébrique 2**

Mathématiques Année 2017–2018

Devoir Surveillé, 8 novembre 2017
Corrigé

Exercice 1 – [DÉCOMPOSITION $A = PLU$]

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1) *Résoudre $AX = B$, déterminer une matrice de permutation P telle que PA puisse s'écrire sous la forme $PA = LU$ et expliciter cette décomposition.*

On trouve $X = {}^t(1, 2, 1)$, $P = P_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2) *En utilisant le résultat précédent, calculer* $\det A$.

$\det A = \varepsilon((2,3)) \det U = 12$.

Exercice 2 – [NORME MATRICIELLE ET CONDITIONNEMENT]

Soit $|| * ||$ une norme définie sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$. On note également $|| * ||$ sa norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$. Pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$, on définit

$$Cond(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||.$$

Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. On désire calculer le produit $AB = C$, sachant que la valeur de B dont on dispose est entachée d'erreur. Soit $B + \Delta B$ cette valeur. On calcule donc en réalité $C + \Delta C = A(B + \Delta B)$. Montrer que

$$\frac{||\Delta C||}{||C||} \leqslant Cond(A) \frac{||\Delta B||}{||B||}.$$

Tout d'abord, notons que comme $AB = C$ et $B \neq 0$, $C \neq 0$. On peut donc bien diviser par $||C||$.

$AB = C$ et $C + \Delta C = A(B + \Delta B)$. Si l'on soustrait la première de ces égalités à la seconde, on obtient que $\Delta C = A\Delta B$. on a donc l'inégalité $(*)$: $||\Delta C|| \leqslant ||A|| \cdot ||\Delta B||$. De $AB = C$, on déduit que $B = A^{-1}C$, donc $||B|| \leqslant ||A^{-1}|| \cdot ||C||$, ce qui s'écrit $\frac{1}{||C||} \leqslant \frac{||A^{-1}||}{||B||}$. En multipliant cette inégalité par l'inégalité $(*)$, on obtient le résultat.

Exercice 3 – [RAYON SPECTRAL DES MATRICES POSITIVES]
Soient m et n deux entiers strictement positifs. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dans cet exercice, on dit que A est positive (resp. strictement positive) et on note $0 \leqslant A$ (resp. $0 < A$) si ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs). Si A et B sont deux matrices de $M_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $A \leqslant B$ (resp. $A < B$) si $0 \leqslant B - A$ (resp. $0 < B - A$).

On considère la norme $|| * ||_\infty$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et sa norme subordonnée dans $M_n(\mathbb{R})$, que l'on note aussi $|| * ||_\infty$.

1) *Soient A, B, A', B' des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $0 \leqslant A \leqslant B$ et $0 \leqslant A' \leqslant B'$. Montrer les propriétés suivantes.*

a) $0 \leqslant AA' \leqslant BB'$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $0 \leqslant A^k \leqslant B^k$.

c) $||A||_\infty \leqslant ||B||_\infty$.

d) $\rho(A) \leqslant \rho(B)$.

On note a_{ij}, b_{ij}, a'_{ij}, b'_{ij} les coefficients de A, B, A' et B'. Soit $(AA')_{ij}$ le coefficient (i,j) de AA'. Alors $(AA')_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a'_{kj} \leqslant \sum_{k=1}^n b'_{ik}b'_{kj} = (BB')_{ij}$ puisque pour tout (i,k,j), $a_{ik} \leqslant b_{ik}$ et $a'_{kj} \leqslant b'_{kj}$. De plus, $\sum_{k=1}^n a_{ik}a'_{kj} \geqslant 0$ pour tout (i,j) puisque pour tout (i,j,k), $a_{ik} \geqslant 0$ et $a'_{kj} \geqslant 0$. Cela prouve le a).

Pour le b), on procède par récurrence. C'est vrai pour $k = 1$. Supposons que $0 \leqslant A^{k-1} \leqslant B^{k-1}$. Alors d'après le a), $0 \leqslant AA^{k-1} \leqslant BB^{k-1}$ donc $0 \leqslant A^k \leqslant B^k$.

c) On sait que $||A||_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max_i \sum_j a_{ij}$ puisque les a_{ij} sont positifs. Pour tout i, $\sum_j a_{ij} \leqslant \sum_j b_{ij} \leqslant \max_k \sum_j b_{kj} \leqslant ||B||_\infty$. C'est vrai pour tout i, donc $\max_i \sum_j a_{ij} \leqslant ||B||_\infty$. On en déduit que $||A||_\infty \leqslant ||B||_\infty$.

d) On a vu en cours que

$$\rho(A) = \lim_{k \leftarrow +\infty} ||A^k||_\infty^{1/k}.$$

D'après les b) et c), pour tout k, $||A^k||_\infty \leqslant ||B^k||_\infty$, donc $||A^k||_\infty^{1/k} \leqslant ||B^k||_\infty^{1/k}$. On en déduit le résultat.

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ une matrice positive de $M_n(\mathbb{R})$. Pour tout i, on note

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

2) *Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_i = \alpha$ pour tout i, alors $\rho(A) = \alpha$.*

Dans ce cas, $\alpha = ||A||_\infty$ et on sait que $\rho(A) \leqslant ||A||_\infty$: c'est une conséquence du théorème de Gershgorin-Hadamard. On a donc bien l'inégalité $\rho(A) \leqslant \alpha$. Soit $U = {}^t(1, \dots, 1)$. $AU = \alpha U$, donc $\rho(A) \geqslant \alpha$. On en déduit l'égalité.

3) *Soit $\alpha = \min_{i\in[[1,n]]} \alpha_i$.*

a) Montrer que $\alpha \leqslant \rho(A)$. Indication : si $\alpha \neq 0$, on pourra utiliser la matrice $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ définie par : $b_{ij} = \dfrac{\alpha}{\alpha_i} a_{ij}$.

Supposons d'abord que $\alpha = 0$. Par définition,

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \operatorname{spec} A\}.$$

$\rho(A)$ est donc le plus grand élément d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}_+$. C'est donc un réel positif et $\rho(A) \geqslant 0 = \alpha$.

Si $\alpha > 0$, suivons l'indication et considérons la matrice B. Notons que comme $0 < \alpha = \min \alpha_i$, les α_i sont non nuls et les fractions $\dfrac{\alpha}{\alpha_i}$ ont un sens. Pour tout i,

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \frac{\alpha}{\alpha_i} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \frac{\alpha}{\alpha_i} \alpha_i = \alpha.$$

Donc la matrice B vérifie les hypothèses de la question **3)** a). On en déduit que $\rho(B) = \alpha$. Or par construction de B, $B \leqslant A$ (puisque pour tout i, $\alpha \leqslant \alpha_i$ donc $b_{ij} \leqslant a_{ij}$). On en déduit que $\rho(B) \leqslant \rho(A)$ donc que $\alpha \leqslant \rho(A)$.

b) *Justifier alors l'encadrement*

$$(1) \qquad \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)$$

(il suffit de justifier la seconde inégalité puisque la première provient du a)).

Parmi les corollaires du théorème de Gershgorin-Hadamard, on a vu que

$$\rho(A) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Comme ici, A est positive, $|a_{ij}| = a_{ij}$ pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$. Cela prouve l'inégalité.

4) *Soit $X = (x_i) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ strictement positif. Soit $D_X = \mathrm{Diag}(x_1, \ldots, x_n)$.*

a) *Calculer le coefficient (i,j) de $D_X^{-1} A D_X$.*

Il est égal à $(D_X^{-1} A D_X)_{ij} = a_{ij} x_i^{-1} x_j$.

b) *Montrer que*

$$(2) \qquad \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(AX)_i}{x_i} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(AX)_i}{x_i}$$

Les matrices A et $D_X^{-1} A D_X$ ont même rayon spectral. Comme la matrice inverse de D_X est $D_X^{-1} = \mathrm{Diag}(x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1})$, cette matrice est positive. Donc $D_X^{-1} A D_X$ est positive comme produit de trois matrices positives. De plus,

$$\sum_{j=1}^{n} (D_X^{-1} A D_X)_{ij} = \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \frac{(AX)_i}{x_i}.$$

Les inégalités demandées proviennent alors des inégalités (1) appliquées à la matrice positive $D_X^{-1} A D_X$.

5) *Montrer que si A admet un vecteur propre strictement positif, alors la valeur propre associée est $\rho(A)$ et*

$$\rho(A) = \sup_{0 < X} \left(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right) = \inf_{0 < X} \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{(AX)_i}{x_i} \right).$$

Soit $V = (v_i)$ un tel vecteur et soit λ la valeur propre associée. Alors $AV = \lambda V$ et donc pour tout i, $\dfrac{(AV)_i}{v_i} = \lambda$. Les inégalités (2) appliquées à $X = V$ deviennent $\lambda \leqslant \rho(A) \leqslant \lambda$ donc $\rho(A) = \lambda$ donc $\rho(A) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{(AV)_i}{v_i}$. On en déduit que

$$\rho(A) \leqslant \max_{0<X} \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{(AX)_i}{x_i}.$$

Mais d'après la première inégalité de (2), pour tout X strictement positif,

$$\rho(A) \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{(AX)_i}{x_i}.$$

Donc

$$\rho(A) \geqslant \max_{0<X} \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{(AX)_i}{x_i}.$$

Cela prouve la première égalité. La seconde se montre de la même façon.